Analyse 1

Série N°1

Propriétés élémentaires du corps des réels

Exercice 1. 1. **Somme et produit d'un rationnel et d'un irrationnel**

Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$.

i) Supposons par l'absurde que $s = r + x \in \mathbb{Q}$. Alors $x = s - r$. Comme $\mathbb{Q}$ est un corps, la différence de deux rationnels est un rationnel, donc $x \in \mathbb{Q}$. Ceci contredit l'hypothèse $x \notin \mathbb{Q}$. Donc $r + x \notin \mathbb{Q}$.

ii) Supposons par l'absurde que $p = r \cdot x \in \mathbb{Q}$ avec $r \neq 0$. Alors $x = \frac{p}{r}$. Comme $r \in \mathbb{Q}^*$, son inverse $\frac{1}{r} \in \mathbb{Q}$. Le produit de deux rationnels étant un rationnel, on aurait $x \in \mathbb{Q}$, ce qui est une contradiction. Donc $r \cdot x \notin \mathbb{Q}$.

2. **Montrons que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$**

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Il existe alors $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$ (fraction irréductible). En élevant au carré, on obtient $2 = \frac{p^2}{q^2}$, soit $p^2 = 2q^2$. Ainsi p^2 est pair, ce qui implique que p est pair. On peut écrire $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. L'équation devient $(2k)^2 = 2q^2$, soit $4k^2 = 2q^2$, d'où $q^2 = 2k^2$. Ainsi q^2 est pair, ce qui implique que q est pair. p et q étant tous deux pairs, $\operatorname{pgcd}(p, q) \geq 2$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3. **Densité des irrationnels entre deux rationnels**

Soient $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $a < b$. On cherche $z \notin \mathbb{Q}$ tel que $a < z < b$. Considérons le nombre $z = a + \frac{\sqrt{2}}{2}(b - a)$.

i) Puisque $1 < \sqrt{2} < 2$, on a $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$. Comme $(b - a) > 0$, on en déduit que $0 < \frac{\sqrt{2}}{2}(b - a) < b - a$, d'où $a < z < b$.

ii) Par la question 1, comme $(b - a) \in \mathbb{Q}^*$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$, leur produit est irrationnel. En y ajoutant $a \in \mathbb{Q}$, z reste irrationnel.

4. **Somme de racines irrationnelles**

Soient $x, y \in \mathbb{Q}_+$ tels que $\sqrt{x}, \sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$. Supposons par l'absurde que $S = \sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$. Puisque $\sqrt{x}, \sqrt{y} > 0$, alors $S > 0$. On a $S^2 = x + y + 2\sqrt{xy}$. Comme $S, x, y \in \mathbb{Q}$, alors $2\sqrt{xy} = S^2 - x - y \in \mathbb{Q}$, d'où $\sqrt{xy} \in \mathbb{Q}$. Calculons maintenant :

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x - y}{S}$$

Puisque $x, y, S \in \mathbb{Q}$, alors $(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \in \mathbb{Q}$. Par addition, $\sqrt{x} = \frac{1}{2}\left((\sqrt{x} + \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})\right)$ serait un rationnel comme somme de rationnels. Ceci contredit l'hypothèse $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$. Donc $\sqrt{x} + \sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$.

5. **En déduire que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$**

On a $x = 2 \in \mathbb{Q}_+$ et $y = 3 \in \mathbb{Q}_+$. On a démontré que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. De la même manière (ou car 3 n'est pas un carré parfait), $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. D'après le résultat de la question précédente, $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2. Supposons par l'absurde que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ soit un rationnel positif $\frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. L'égalité $q \ln 3 = p \ln 2$ se transforme, par les propriétés de la fonction logarithme, en

$$\ln(3^q) = \ln(2^p).$$

En appliquant la fonction exponentielle, on obtient l'égalité

$$3^q = 2^p.$$

Or, cette équation est impossible dans $\mathbb{N}^*$ car une puissance de 3 est toujours impaire, tandis qu'une puissance de 2 est toujours paire. Cette contradiction permet de conclure que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 3. 1. **Démontrons les formules pour** $\max(x, y)$ **et** $\min(x, y)$

Pour démontrer ces égalités, nous procédons par disjonction de cas selon le signe de $x - y$:

Si $x \geq y$, alors $|x - y| = x - y$. Dans ce cas :

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + x - y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max(x, y)$$

$$\frac{x + y - |x - y|}{2} = \frac{x + y - (x - y)}{2} = \frac{2y}{2} = y = \min(x, y)$$

Si $x < y$, alors $|x - y| = -(x - y) = y - x$. Dans ce cas :

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + y - x}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max(x, y)$$

$$\frac{x + y - |x - y|}{2} = \frac{x + y - (y - x)}{2} = \frac{2x}{2} = x = \min(x, y)$$

Dans tous les cas, les formules sont vérifiées.

2. **Formule similaire pour** $\max(x, y, z)$

Pour trouver le maximum de trois nombres, on utilise la propriété d'associativité : $\max(x, y, z) = \max(\max(x, y), z)$.

En posant $M_{xy} = \max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$, la formule devient :

$$\max(x, y, z) = \frac{M_{xy} + z + |M_{xy} - z|}{2}$$

En remplaçant M_{xy} par son expression, on obtient la formule complète :

$$\max(x, y, z) = \frac{\frac{x+y+|x-y|}{2} + z + \left|\frac{x+y+|x-y|}{2} - z\right|}{2}$$

Ce qui peut se simplifier légèrement en :

$$\max(x, y, z) = \frac{x + y + |x - y| + 2z + |x + y + |x - y| - 2z|}{4}$$

Exercice 4. 1. L'ensemble $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$

L'ensemble des majorants est $[1, +\infty[$ et l'ensemble des minorants est $] - \infty, 0]$.Alors

$$\sup A = 1$$

et, comme 1 appartient à A (car 1 est un rationnel), le plus grand élément est

$$\max A = 1.$$

La borne inférieure A est

$$\inf A = 0$$

et, comme 0 appartient à A, le plus petit élément est

$$\min A = 0.$$

2. L'ensemble $B =]0, 1[\cap \mathbb{Q}$

L'ensemble des majorants est $[1, +\infty[$ et l'ensemble des minorants est $]-\infty, 0]$. Alors la borne supérieure de B est

$$\sup B = 1,$$

mais comme 1 n'appartient pas à l'intervalle ouvert $]0, 1[$, il n'existe pas de plus grand élément. De même, la borne inférieure de B est

$$\inf B = 0,$$

mais comme 0 n'appartient pas à l'ensemble, il n'existe pas de plus petit élément.

3. L'ensemble $C = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Considérons les termes de la suite $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n^2}$.

i) Pour n pair ($n = 2k$), les termes sont de la forme $1 + \frac{1}{n^2}$: ils sont strictement supérieurs à 1 et décroissent vers 1. La valeur maximale est atteinte pour $n = 2$, soit $u_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

ii) Pour n impair ($n = 2k + 1$), les termes sont de la forme $-1 + \frac{1}{n^2}$: ils sont strictement supérieurs à -1 et décroissent vers -1. Le premier terme impair est $u_1 = -1 + 1 = 0$.

L'ensemble des majorants est $[\frac{5}{4}, +\infty[$, donc la borne supérieure de C est

$$\sup C = \frac{5}{4}.$$

Comme cette valeur est atteinte pour $n = 2$, le plus grand élément est

$$\max C = \frac{5}{4}.$$

L'ensemble des minorants est $]-\infty, -1]$, donc la borne inférieure de C est

$$\inf C = -1.$$

Cependant, comme u_n est toujours strictement supérieur à -1 (car $\frac{1}{n^2} > 0$), la valeur -1 n'est jamais atteinte et il n'existe pas de plus petit élément.

Exercice 5. Soit $b_0 \in B$. Par hypothèse, $\forall a \in A, a \leq b_0$. Donc A est majorée par b_0. Comme $A \neq \emptyset$, $\sup A$ existe.

Soit $a_0 \in A$. Par hypothèse, $\forall b \in B, a_0 \leq b$. Donc B est minorée par a_0. Comme $B \neq \emptyset$, $\inf B$ existe.

Pour tout $b \in B$, b est un majorant de A par hypothèse, donc $\sup A \leq b$.

Ainsi, $\sup A$ est un minorant de B, ce qui implique que $\sup A \leq \inf B$ par définition de la borne inférieure.

Exercice 6.

1. E est non vide car $f(0) \in [0, 1]$, donc $f(0) \geq 0$, d'où $0 \in E$. E est inclus dans $[0, 1]$, donc E est majoré par 1. Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure, donc $b = \sup E$ existe et $b \in [0, 1]$.
2. — Pour tout $x \in E$, $x \leq b$. Comme f est croissante, $x \leq f(x) \leq f(b)$. Ainsi $f(b)$ est un majorant de E, donc $b \leq f(b)$.
   — En appliquant f (croissante) à $b \leq f(b)$, on obtient $f(b) \leq f(f(b))$, ce qui signifie que $f(b) \in E$. Comme b est le majorant de E, on a $f(b) \leq b$.
   Par double inégalité, on conclut que $f(b) = b$.

Exercice 7.

1. A est bornée, donc il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall z \in A, m \leq z \leq M$. Pour tout $(x, y) \in A^2$, on a $x \leq M$ et $-y \leq -m$, donc $x - y \leq M - m$. De même $y - x \leq M - m$. Ainsi $|x - y| \leq M - m$. B est donc majorée par $M - m$.

2. On a déjà $\sup B \leq \sup A - \inf A$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition des bornes, il existe $x, y \in A$ tels que $x > \sup A - \frac{\epsilon}{2}$ et $y < \inf A + \frac{\epsilon}{2}$. Alors $x - y > \sup A - \inf A - \epsilon$. Comme $|x - y| \geq x - y$, on a $|x - y| > (\sup A - \inf A) - \epsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit $\sup B = \sup A - \inf A$.

Exercice 8. 1. (a) Soit $c = \frac{a+b}{2}$. Comme $a < b$, on a $2a < a + b < 2b$, d'où $a < c < b$. c est bien un réel.

(b) Oui. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Par la propriété archimédienne, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n(b - a) > 1$. L'intervalle $]na, nb[$ contient alors au moins un entier m, d'où $a < \frac{m}{n} < b$.

(c) Oui. En appliquant la densité de $\mathbb{Q}$ à $a - \sqrt{2}$ et $b - \sqrt{2}$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $a - \sqrt{2} < q < b - \sqrt{2}$. Le nombre $I = q + \sqrt{2}$ est irrationnel et $a < I < b$.

2. Si l'ensemble des rationnels dans $]a, b[$ était fini, soit q^*(Le max d'un ensemble fini et toujours existe) le plus grand d'entre eux. L'intervalle $]q^*, b[$ contiendrait encore un rationnel par densité, contredisant la maximalité de q^*. Il en va de même pour les irrationnels.

Exercice 9. Soit $A = \{r^3 \mid r \in \mathbb{Q}\}$. Pour montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$, nous devons prouver que pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, il existe $y \in A$ tel que $a < y < b$.

Soit

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $a < b$, nous avons :

$$\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$$

On sait que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, entre les deux réels $\sqrt[3]{a}$ et $\sqrt[3]{b}$, il existe nécessairement un nombre rationnel r.

$$\exists r \in \mathbb{Q} \quad \text{tel que} \quad \sqrt[3]{a} < r < \sqrt[3]{b}$$

La fonction $g(x) = x^3$ est également strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En appliquant cette fonction à l'inégalité précédente, l'ordre est conservé :

$$(\sqrt[3]{a})^3 < r^3 < (\sqrt[3]{b})^3$$

Ce qui se simplifie en :

$$a < r^3 < b$$

Ainsi nous avons trouvé un élément $y = r^3$ appartenant à A tel que $y \in]a, b[$. L'ensemble $\{r^3 \mid r \in \mathbb{Q}\}$ est donc dense dans $\mathbb{R}$.