Correction de l'examen d'Analyse 1

Durée 1h30

Exercice 1. 1. Soit $x = 0,336433643364\ldots$. On remarque que la période est 3364, elle comporte 4 chiffres. On multiplie x par $10^4 = 10000$:

$$10000x = 3364,33643364\cdots = 3364 + x$$

D'où : $9999x = 3364$, ce qui donne :

$$x = \frac{3364}{9999}$$

Ici $a = 3364 \in \mathbb{Z}$ et $b = 9999 \in \mathbb{N}^*$.

2. (a) Soit $x > 0$. Appliquons le **Théorème des Accroissements Finis (TAF)** à la fonction $f(t) = \ln(t)$ sur l'intervalle $[x, x+1]$.
— f est continue sur $[x, x+1]$.
— f est dérivable sur $]x, x+1[$ et $f'(t) = \frac{1}{t}$.
D'après le TAF, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que :

$$f(x+1) - f(x) = f'(c)((x+1) - x) \implies \ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{c}$$

Or, $\ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Comme $x < c < x+1$, on a en passant à l'inverse :

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

En remplaçant $\frac{1}{c}$, on obtient bien :

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Prenons le logarithme :

$$\ln(u_n) = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

En utilisant l'encadrement précédent avec $x = n$:

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

Multiplions par $n > 0$:

$$\frac{n}{n+1} < n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{n}{n} = 1$$

On sait que $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Par le **théorème des gendarmes** :

$$\lim_{n \to +\infty} \ln(u_n) = 1$$

Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = e^1 = e$$

3. Soient $a, b > 0$.

(a) $A = \{a + bn \mid n \in \mathbb{N}\}$.
— **Minoration :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $bn \geq 0$, donc $a + bn \geq a$. $\inf A = \min A = a$.
— **Majoration :** $bn \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. A n'est pas majorée. $\sup A = +\infty$.

(b) $B = \{(-1)^n a + \frac{b}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
— Si n est pair ($n = 2k$) : $a + \frac{b}{2k}$. Les valeurs décroissent vers a.
— Si n est impair ($n = 2k+1$) : $-a + \frac{b}{2k+1}$. Les valeurs décroissent vers $-a$.
— **Bornes :** $\sup B = \max B = a + \frac{b}{2}$ (pour $n = 2$). $\inf B = -a$ (limite quand $n \to +\infty$ et n impair).

(c) $C = \{a + \frac{(-1)^n b}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
— Si n est pair : $a + \frac{b}{n} > a$. Le maximum est pour $n = 2$: $a + \frac{b}{2}$.
— Si n est impair : $a - \frac{b}{n} < a$. Le minimum est pour $n = 1$: $a - b$.
— **Bornes :** $\sup C = \max C = a + \frac{b}{2}$ et $\inf C = \min C = a - b$.

Exercice 2. Théorème du point fixe de Banach

1. (a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| \leq \lambda^n |u_1 - u_0|$.
— **Initialisation :** Pour $n = 0$, $|u_1 - u_0| \leq \lambda^0 |u_1 - u_0| = |u_1 - u_0|$, ce qui est vrai.
— **Hérédité :** Supposons la propriété vraie au rang n. Au rang $n+1$:
$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(u_n)|$$
Comme f est contractante de rapport λ :
$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \lambda |u_{n+1} - u_n|$$
En utilisant l'hypothèse de récurrence :
$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \lambda(\lambda^n |u_1 - u_0|) = \lambda^{n+1} |u_1 - u_0|$$
La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Par l'inégalité triangulaire :
$$|u_{n+m} - u_n| \leq |u_{n+m} - u_{n+m-1}| + |u_{n+m-1} - u_{n+m-2}| + \cdots + |u_{n+1} - u_n|$$
En utilisant le résultat de la question précédente :
$$|u_{n+m} - u_n| \leq (\lambda^{n+m-1} + \lambda^{n+m-2} + \cdots + \lambda^n)|u_1 - u_0|$$
$$|u_{n+m} - u_n| \leq \lambda^n (1 + \lambda + \cdots + \lambda^{m-1})|u_1 - u_0|$$
Comme $0 < \lambda < 1$, la somme géométrique est majorée par sa limite infinie : $\sum_{k=0}^{m-1} \lambda^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = \frac{1}{1-\lambda}$.
On obtient donc :
$$|u_{n+m} - u_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |u_1 - u_0|$$

(c) L'inégalité précédente montre que $|u_{n+m} - u_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ car $\lambda^n \to 0$. La suite (u_n) est donc une **suite de Cauchy**. Comme $\mathbb{R}$ est complet et que $[a, b]$ est un fermé, la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \in [a, b]$.

2. Par l'inégalité triangulaire, en insérant u_{n+1} :
$$|f(\ell) - \ell| \leq |f(\ell) - u_{n+1}| + |u_{n+1} - \ell|$$
Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, on a :
$$|f(\ell) - \ell| \leq |f(\ell) - f(u_n)| + |u_{n+1} - \ell|$$
Existence : Puisque $u_n \to \ell$ et que f est continue (toute fonction contractante est lipschitzienne, donc continue), alors $f(u_n) \to f(\ell)$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité :

— $|f(\ell) - f(u_n)| \to 0$
— $|u_{n+1} - \ell| \to 0$
On en déduit que $|f(\ell) - \ell| = 0$, soit $f(\ell) = \ell$. ℓ est un point fixe.

3. **Unicité :** Supposons qu'il existe deux points fixes x^* et y^*. Alors $f(x^*) = x^*$ et $f(y^*) = y^*$. D'après le caractère contractant de f :

$$|x^* - y^*| = |f(x^*) - f(y^*)| \leq \lambda |x^* - y^*|$$

D'où : $(1-\lambda)|x^* - y^*| \leq 0$. Comme $1 - \lambda > 0$, cela impose $|x^* - y^*| = 0$, donc $x^* = y^*$. Le point fixe est donc unique.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Implication (ii) $\implies$ (i) : Supposons qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = cx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x+y) = c(x+y) = cx + cy = f(x) + f(y)$$

L'assertion (i) est donc vérifiée.

Implication (i) $\implies$ (ii) : Supposons que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(a) En prenant $x = y = 0$ dans (i), on a $f(0+0) = f(0) + f(0)$, soit $f(0) = 2f(0)$. On en déduit que $f(0) = 0$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en prenant $y = -x$ dans (i), on a :

$$f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \implies f(0) = f(x) + f(-x)$$

Comme $f(0) = 0$, on obtient $0 = f(x) + f(-x)$, d'où $f(-x) = -f(x)$. (La fonction est impaire).

(c) Montrons par récurrence sur n que $f(nx) = nf(x)$.
— **Initialisation :** Pour $n = 0$, $f(0 \cdot x) = f(0) = 0 = 0 \cdot f(x)$. Vrai.
— **Hérédité :** Supposons $f(nx) = nf(x)$. Alors :

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$

D'après b), ceci s'étend à $\mathbb{Z}$: si $n < 0$, posons $m = -n \in \mathbb{N}$, alors $f(nx) = f(-mx) = -f(mx) = -mf(x) = nf(x)$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après c) avec $x = 1$, on a $f(n) = f(n \cdot 1) = nf(1)$. En posant $c = f(1)$, on a $f(n) = cn$.

(e) Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. On a $f(1) = f(n \cdot \frac{1}{n})$. D'après c), $f(n \cdot \frac{1}{n}) = nf(\frac{1}{n})$. On a donc $c = nf(\frac{1}{n})$, d'où $f(\frac{1}{n}) = \frac{c}{n}$.

(f) Soit $q \in \mathbb{Q}$, alors $q = \frac{p}{q'}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$.

$$f(q) = f\left(p \cdot \frac{1}{q'}\right) = pf\left(\frac{1}{q'}\right) = p\left(\frac{c}{q'}\right) = c \cdot \frac{p}{q'} = cq$$

Ainsi, $f(q) = cq$ pour tout rationnel q.

(g) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels (q_n) qui converge vers x. D'après f), pour tout n, $f(q_n) = cq_n$. Puisque f est **continue** sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = f(\lim_{n\to+\infty} q_n) = \lim_{n\to+\infty} f(q_n) = \lim_{n\to+\infty} cq_n = c(\lim_{n\to+\infty} q_n) = cx$$

On conclut que $f(x) = cx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit f une fonction trois fois dérivable sur I et g définie par :

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}(f'(a) + f'(x)) + K(x-a)^3$$

1. **Dérivabilité et calcul de g'** : Comme f est trois fois dérivable sur I, f et f' sont au moins deux fois dérivables sur I. Par somme et produit de fonctions dérivables, g est au moins deux fois dérivable sur I. Calculons la dérivée première $g'(x)$ en utilisant la règle du produit pour le terme central :

$$g'(x) = f'(x) - 0 - \left[\frac{1}{2}(f'(a) + f'(x)) + \frac{x-a}{2}(0 + f''(x))\right] + 3K(x-a)^2$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}f'(a) - \frac{1}{2}f'(x) - \frac{x-a}{2}f''(x) + 3K(x-a)^2$$

En simplifiant les termes en $f'(x)$, on obtient :

$$g'(x) = \frac{f'(x) - f'(a)}{2} - \frac{x-a}{2}f''(x) + 3K(x-a)^2$$

2. **Existence de $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$** : Vérifions les conditions du théorème de Rolle pour g sur $[a, b]$:
— g est continue sur $[a, b]$ (car dérivable).
— g est dérivable sur $]a, b[$.
— $g(a) = f(a) - f(a) - 0 + 0 = 0$.
— $g(b) = 0$ par définition de la constante K.
D'après le **théorème de Rolle**, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

3. **Existence de $\theta \in]a, b[$ et expression finale** : Calculons $g''(x)$ à partir de l'expression de $g'(x)$ trouvée en (1) :

$$g''(x) = \frac{1}{2}f''(x) - \left[\frac{1}{2}f''(x) + \frac{x-a}{2}f'''(x)\right] + 6K(x-a)$$

$$g''(x) = -\frac{x-a}{2}f'''(x) + 6K(x-a) = (x-a)\left(6K - \frac{1}{2}f'''(x)\right)$$

Appliquons maintenant le théorème de Rolle à g' sur $[a, c]$:
— $g'(a) = \frac{f'(a)-f'(a)}{2} - 0 + 0 = 0$.
— $g'(c) = 0$ (d'après la question 2).
— g' est dérivable sur $[a, c]$ car f est trois fois dérivable.
Il existe donc $\theta \in]a, c[\subset]a, b[$ tel que $g''(\theta) = 0$.

$$g''(\theta) = (\theta - a)\left(6K - \frac{1}{2}f'''(\theta)\right) = 0$$

Comme $\theta \neq a$, on a $6K = \frac{1}{2}f'''(\theta)$, soit $K = \frac{f'''(\theta)}{12}$.

Enfin, utilisons la condition $g(b) = 0$:

$$0 = f(b) - f(a) - \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b)) + \frac{f'''(\theta)}{12}(b-a)^3$$

En isolant $f(b) - f(a)$, on obtient la formule demandée :

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b)) - \frac{(b-a)^3}{12}f'''(\theta)$$