Analyse 1

Série N°3

Limites et fonctions continues

Exercice 1. 1. Soit $\epsilon > 0$. Posons $\delta = \frac{\epsilon}{3}$. $|x-2| < \delta \implies |(3x-1)-5| = 3|x-2| < 3\delta = \epsilon$.

2. Soit $\epsilon > 0$. Posons $\delta = \min(1, \frac{\epsilon}{3})$. $|x-1| < \delta \implies |x+1| < 3$, d'où $|x^2-1| = |x-1||x+1| < 3\delta \leq \epsilon$.

3. Soit $\epsilon > 0$. Posons $\delta = \min(1, 6\epsilon)$. $|x-3| < \delta \implies x > 2 \implies \frac{1}{3|x|} < \frac{1}{6}$. D'où $|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}| = \frac{|x-3|}{3|x|} < \frac{\delta}{6} \leq \epsilon$.

Exercice 2. 1. Pour $x \neq 1$, multiplions par la forme conjuguée :

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

En simplifiant par $(x-1)$:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}$$

Par passage à la limite :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1+1}{\sqrt{1+3}+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2. La limite en 1 étant finie, f est prolongeable par continuité. Soit $\tilde{f}$ son prolongement défini par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Exercice 3. 1. Soit $h(x) = x^3 + x^2 - 1$. h est continue sur $[0,1]$. $h(0) = -1 < 0$ et $h(1) = 1 > 0$. D'après le TVI, $\exists c \in [0,1]$ tel que $h(c) = 0$.

2. Soit $\phi(x) = f(x) - x$. ϕ est continue sur $[0,1]$. $\phi(0) = f(0) \geq 0$ et $\phi(1) = f(1) - 1 \leq 0$. D'après le TVI, $\exists c \in [0,1]$ tel que $\phi(c) = 0$, soit $f(c) = c$.

3. Soit $g(x) = f(x + \frac{b-a}{2}) - f(x)$ sur $[a, \frac{a+b}{2}]$. $g(a) = f(a + \frac{b-a}{2}) - f(a)$ et $g(\frac{a+b}{2}) = f(b) - f(a + \frac{b-a}{2})$. Comme $f(a) = f(b)$, on a $g(\frac{a+b}{2}) = -g(a)$. Le produit $g(a) \cdot g(\frac{a+b}{2}) \leq 0$, donc par le TVI, il existe $c \in [a, \frac{a+b}{2}]$ tel que $g(c) = 0$.

Exercice 4. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc il existe une suite $(r_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $r_n \to x$. Par continuité de f : $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n)$. Comme $f(r_n) = 0$ pour tout n, $f(x) = 0$.

2. (a) $f(0) = 0$. Par récurrence, $f(n) = nf(1)$ pour $n \in \mathbb{N}$. $f(n-n) = f(0) = 0 \implies f(-n) = -f(n)$, donc $f(n) = nf(1)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
   (b) Soit $r = \frac{p}{q}$. $f(p) = f(q \cdot \frac{p}{q}) = qf(\frac{p}{q})$. Comme $f(p) = pf(1)$, on a $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q} f(1)$.
   (c) Soit $a = f(1)$. Les fonctions f et $x \mapsto ax$ coïncident sur $\mathbb{Q}$. Par continuité et densité de $\mathbb{Q}$, elles coïncident sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.

1. Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, pour $\epsilon = 1$, il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geq A$, $f(x) \in [L-1, L+1]$. Sur $[0, A]$, f est continue sur un segment, donc elle est bornée par un certain M_0. En prenant $M = \max(M_0, |L-1|, |L+1|)$, on a $\forall x \in [0, +\infty[, |f(x)| \leq M$.
2. Non, les bornes ne sont pas nécessairement atteintes. *Contre-exemple :* $f(x) = \frac{x}{x+1}$ sur $[0, +\infty[$. f est continue, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. On a $\forall x \geq 0, 0 \leq f(x) < 1$. La borne supérieure est 1, mais l'équation $f(x) = 1$ n'a pas de solution dans $[0, +\infty[$.