Analyse 1

Série N°4

Fonction dérivable et application

Exercice 1. 1. Le polynôme P est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, considérons l'intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$. On a $P(\alpha_i) = P(\alpha_{i+1}) = 0$. D'après le **Théorème de Rolle**, il existe au moins un réel $c_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $P'(c_i) = 0$.

Comme les intervalles $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ sont deux à deux disjoints, nous avons trouvé au moins $n-1$ racines réelles distinctes pour P'. Or, P est de degré n, donc P' est de degré $n-1$. Un polynôme de degré $n-1$ possède au plus $n-1$ racines (réelles ou complexes).
Ainsi P' possède exactement $n-1$ racines, et elles sont toutes réelles et distinctes.

2. **Racines de** $S = P + P'$: Considérons la fonction auxiliaire $f(x) = P(x)e^x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est :

$$f'(x) = P'(x)e^x + P(x)e^x = (P(x) + P'(x))e^x = S(x)e^x$$

Comme $P(\alpha_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a également $f(\alpha_i) = 0$. En appliquant le **Théorème de Rolle** à f sur chaque intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ ($n-1$ intervalles), il existe $d_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $f'(d_i) = 0$. Comme $e^{d_i} \neq 0$, cela implique $S(d_i) = 0$. On trouve ainsi au moins $n-1$ **racines réelles distinctes** pour S.

3. **Réalité de la n-ième racine** : Le polynôme $S = P + P'$ est à coefficients réels et de degré n. Nous avons déjà établi l'existence de $n-1$ racines réelles distinctes $d_1, \ldots, d_{n-1}$.

Soit d_0 la dernière racine manquante dans $\mathbb{C}$. Supposons par l'absurde que d_0 soit complexe non réelle ($d_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$). Comme $S \in \mathbb{R}[X]$, si d_0 est une racine, alors son conjugué $\overline{d_0}$ est également une racine de S. Puisque d_0 n'est pas réelle, on a $d_0 \neq \overline{d_0}$. Cela signifierait que S possède au moins deux racines supplémentaires, ce qui porterait le nombre total de racines à :

$$(n-1) + 2 = n + 1$$

Ceci est absurde car un polynôme de degré n ne peut pas avoir plus de n racines. Par conséquent, la racine d_0 est nécessairement **réelle**.

Exercice 2. 1. Considérons la fonction $h(x) = \tan(x) + \frac{\pi}{4}$ sur l'intervalle $I = \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

(a) La fonction tan est continue sur tout intervalle où elle est définie. Comme $\frac{\pi}{2} \notin I$, h est continue sur I.

(b) $h\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} = -1 + \frac{\pi}{4} \approx -0,21 < 0$ (car $\pi < 4$).
$h(\pi) = \tan(\pi) + \frac{\pi}{4} = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} > 0$.

(c) Puisque h est continue et que $h(\frac{3\pi}{4}) \cdot h(\pi) < 0$, d'après le **TVI**, il existe au moins un réel $x_0 \in]\frac{3\pi}{4}, \pi[$ tel que $h(x_0) = 0$.

(d) La dérivée de h est $h'(x) = 1 + \tan^2(x)$. Pour tout $x \in I$, $h'(x) > 0$. La fonction h est donc strictement croissante sur I, ce qui garantit l'**unicité** de la solution.

2. Soit $f(x) = e^x \sin(x) - 1$ sur $[0, \pi]$.

(a) f est continue sur $[0, \pi]$.

(b) f est dérivable sur $]0, \pi[$.

(c) $f(0) = e^0 \sin(0) - 1 = -1$ et $f(\pi) = e^\pi \sin(\pi) - 1 = -1$.
Comme $f(0) = f(\pi)$, d'après le **théorème de Rolle**, il existe au moins un réel $c \in]0, \pi[$ tel que $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x)).$$

L'équation $f'(c) = 0$ devient $e^c(\sin(c) + \cos(c)) = 0$. Puisque $e^c > 0$ pour tout c, on a nécessairement $\sin(c) + \cos(c) = 0$. L'équation $\sin(x) + \cos(x) = 0$ admet donc bien au moins une solution dans $]0, \pi[$.

Exercice 3. Soit $P(X) = X^n + pX + q$, et $n \geqslant 3$.

1. Supposons que P possède k racines réelles distinctes. Par applications successives du théorème de Rolle :
   P' possède au moins $k-1$ racines réelles.
   P'' possède au moins $k-2$ racines réelles.
   Or, $P''(X) = n(n-1)X^{n-2}$. Cette dérivée seconde ne s'annule qu'en $x = 0$ (au plus une valeur). On a donc $k - 2 \leq 1$, ce qui implique $k \leq 3$. Le polynôme P admet donc au plus **3 racines réelles**.
2. **Cas où n est pair** : Si n est pair, alors $n-1$ est impair. La fonction $P'(x) = nx^{n-1} + p$ est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car sa dérivée $P''(x)$ est positive et ne s'annule qu'en 0). Étant strictement monotone, P' s'annule au plus **une fois** sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Rolle, si P avait 3 racines, P' en aurait au moins 2. Par conséquent, P admet au plus **2 racines réelles**.

Exercice 4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - P(x)$.

La dérivée d'ordre $n+1$ de f est $f^{(n+1)}(x) = e^x$, car la dérivée d'ordre $n+1$ d'un polynôme de degré n est nulle.

Puisque $f^{(n+1)}(x) = e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}$ ne s'annule jamais.

D'après le théorème de Rolle, si une fonction possède k racines, sa dérivée en possède au moins $k-1$. Par conséquent, $f^{(n)}$ possède au plus 1 racine, $f^{(n-1)}$ au plus 2 racines, et par itération, f possède au plus $n+1$ racines.

L'équation $P(x) = e^x$ admet donc un nombre fini de solutions réelles.

Exercice 5. Théorème des Accroissements Finis

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \arctan(t)$.
f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa dérivée est donnée par $f'(t) = \frac{1}{1+t^2}$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $1 + t^2 \geq 1$, donc $|f'(t)| = \frac{1}{1+t^2} \leq 1$.

D'après le **Théorème des Accroissements Finis (TAF)**, pour tous réels x et y, il existe c compris entre x et y tel que :

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

En passant à la valeur absolue :

$$|\arctan(x) - \arctan(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|$$

Comme $|f'(c)| \leq 1$, on en déduit :

$$|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$$

Considérons la fonction $g(t) = e^t$ sur l'intervalle $[0, x]$ avec $x > 0$. g est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$. D'après le TAF, il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(c) \implies \frac{e^x - 1}{x} = e^c$$

Comme $c > 0$ et que la fonction exponentielle est strictement croissante, on a $e^c > e^0 = 1$. Ainsi, $\frac{e^x-1}{x} \geq 1$, d'où $e^x - 1 \geq x$.

Comme $c \leq x$, on a $e^c \leq e^x$. Ainsi, $\frac{e^x-1}{x} \leq e^x$, d'où $e^x - 1 \leq xe^x$.

Le cas $x = 0$ est trivial ($0 \leq 0 \leq 0$). On conclut que pour tout $x \geq 0$:

$$x \leq e^x - 1 \leq xe^x$$

Soit $h(t) = \sin(t)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(t) = \cos(t)$. Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\cos(t)| \leq 1$, nous appliquons l'**Inégalité des Accroissements Finis (IAF)** : Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I et que $|f'| \leq M$, alors pour tous $x, y \in I$:

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

Ici, avec $M = 1$, nous obtenons immédiatement :

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

Exercice 6. 1. **Étude sur $[k, k+1]$:** Soit $f(t) = \ln(t)$. f est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$. D'après le TAF, $\exists c \in]k, k+1[$ tel que :

$$\ln(k+1) - \ln(k) = f'(c)(k+1-k) = \frac{1}{c}$$

Or, $k < c < k+1 \implies \frac{1}{k+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{k}$. D'où :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

2. **Encadrement de $\ln(1+x)$:** Appliquons le TAF à $f(t) = \ln(t)$ sur $[1, 1+x]$ pour $x > 0$. $\exists d \in]1, 1+x[$ tel que :

$$\frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{(1+x) - 1} = f'(d) = \frac{1}{d} \implies \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{d}$$

Comme $1 < d < 1+x$, alors $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{d} < 1$. En multipliant par $x > 0$:

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Exercice 7. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1+x)$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.a) Soit $g(x) = f(x) - x = \ln(1+x) - x$. La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ comme somme de fonctions usuelles dérivables. Sa dérivée est :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1 - (1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$$

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $-x < 0$ et $1 + x > 0$, donc $g'(x) < 0$.

La fonction g est donc strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Comme $g(0) = \ln(1) - 0 = 0$, et que g est strictement décroissante, l'équation $g(x) = 0$ admet 0 comme unique solution. Par conséquent, **l'unique point fixe de f sur $[0, +\infty[$ est $x = 0$.**

1.b) Puisque $g(0) = 0$ et que g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, alors pour tout $x > 0$, $g(x) < g(0)$, soit $g(x) < 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Si $u_n > 0$, alors $g(u_n) < 0$, donc $u_{n+1} < u_n$. La suite est donc **décroissante**.

Montrons par récurrence que $u_n > 0$.

Initialisation : $u_0 = 1 > 0$.
Hérédité : Supposons $u_n > 0$. Alors $1 + u_n > 1$, donc $u_{n+1} = \ln(1 + u_n) > \ln(1) = 0$.
Ainsi, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

2) On a $f'(x) = \frac{1}{1+x}$. Sur $[0,1]$, la fonction $x \mapsto 1 + x$ est croissante et varie de 1 à 2. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 1$. Il en résulte que $\forall x \in [0,1], 0 < f'(x) \leq 1$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n > 0$, on considère l'intervalle $[0, u_n]$. f est continue sur $[0, u_n]$ et dérivable sur $]0, u_n[$. D'après le **Théorème des Accroissements Finis (TAF)**, il existe $c_n \in]0, u_n[$ tel que :

$$f(u_n) - f(0) = f'(c_n)(u_n - 0) \implies u_{n+1} - 0 = f'(c_n)u_n$$

En utilisant l'admission de l'énoncé $|f'(c_n)| \leq \frac{3}{4}$, et comme $u_n > 0$, on obtient :

$$|u_{n+1}| = |f'(c_n)| \cdot |u_n| \leq \frac{3}{4}|u_n|$$

4) **Récurrence :**
Pour $n = 0$: $u_0 = 1$ et $(\frac{3}{4})^0 = 1$. L'inégalité $0 \leq 1 \leq 1$ est vraie.
Hérédité : Supposons $0 \leq u_n \leq (\frac{3}{4})^n$. D'après la question précédente, $u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$. En injectant l'hypothèse : $u_{n+1} \leq \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$.
On a l'encadrement $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Comme la suite géométrique $((\frac{3}{4})^n)$ converge vers 0 (car $|\frac{3}{4}| < 1$), d'après le **théorème des gendarmes**, on conclut :

$$\lim_{\mathbf{n} \to +\infty} \mathbf{u_n} = \mathbf{0}$$