Analyse 1

Série N°2

Généralités sur les suites

Exercice 1. 1. Suite $a_n = \dfrac{n + (-1)^n}{\sqrt{3}n + 2(-1)^n}$

On factorise par n au numérateur et au dénominateur :

$$a_n = \frac{n\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)}{n\left(\sqrt{3} + \frac{2(-1)^n}{n}\right)} = \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{\sqrt{3} + \frac{2(-1)^n}{n}}$$

Comme $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$. Par quotient de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2. Suite $b_n = \dfrac{1 + 2^n}{1 - 3^n}$

On factorise par le terme prédominant au numérateur (2^n) et au dénominateur (3^n) :

$$b_n = \frac{2^n\left(\frac{1}{2^n} + 1\right)}{3^n\left(\frac{1}{3^n} - 1\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{\frac{1}{2^n} + 1}{\frac{1}{3^n} - 1}$$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{2^n} + 1}{\frac{1}{3^n} - 1} = -1$. Par produit :

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$$

3. Suite $c_n = \cos(\pi n)$

On remarque que $c_n = (-1)^n$. La suite prend les valeurs 1 si n est pair et -1 si n est impair. Elle possède deux valeurs d'adhérence distinctes, donc **la suite c_n n'admet pas de limite**.

4. Suite $d_n = \dfrac{\cos\left(\sqrt[n]{\pi^2 e^{\ln n^n}}\right)}{\sqrt{n^2 + 2}}$

On utilise l'encadrement classique du cosinus : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -1 \leq \cos\left(\sqrt[n]{\pi^2 e^{\ln n^n}}\right) \leq 1$. En divisant par $\sqrt{n^2 + 2} > 0$, on obtient :

$$\frac{-1}{\sqrt{n^2 + 2}} \leq d_n \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{n^2 + 2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} = 0$, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$$

5. Suite $e_n = \dfrac{e^n + \pi^n}{e^n - \pi^n}$

On factorise par π^n car $\pi > e$:

$$e_n = \frac{\pi^n\left(\left(\frac{e}{\pi}\right)^n + 1\right)}{\pi^n\left(\left(\frac{e}{\pi}\right)^n - 1\right)} = \frac{\left(\frac{e}{\pi}\right)^n + 1}{\left(\frac{e}{\pi}\right)^n - 1}$$

Comme $0 < \frac{e}{\pi} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{e}{\pi}\right)^n = 0$. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} e_n = \frac{0 + 1}{0 - 1} = -1$$

6. Suite $f_n = \left(\sin \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$
Pour n suffisamment grand, $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{\pi}{2}$. On sait que sur cet intervalle $0 < \sin(x) < x$. On a donc :
$$0 < \left(\sin \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 0$, par encadrement :
$$\lim_{n\to+\infty} f_n = 0$$
7. Suite $g_n = \sqrt[n+1]{2+(-1)^n}$
On écrit $g_n = \exp\left(\frac{\ln(2+(-1)^n)}{n+1}\right)$. Or, $1 \leq 2+(-1)^n \leq 3$, donc $0 \leq \ln(2+(-1)^n) \leq \ln(3)$. Il vient :
$$0 \leq \frac{\ln(2+(-1)^n)}{n+1} \leq \frac{\ln(3)}{n+1}$$
Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(2+(-1)^n)}{n+1} = 0$. Par continuité de l'exponentielle :
$$\lim_{n\to+\infty} g_n = e^0 = 1$$

Exercice 2. 1. $u_n = 3^n e^{-3n}$
On peut réécrire le terme général sous la forme d'une suite géométrique :
$$u_n = 3^n (e^{-3})^n = \left(\frac{3}{e^3}\right)^n$$
On sait que $e \approx 2,718$, donc $e^3 \approx 20,08$. Ainsi, $0 < \frac{3}{e^3} < 1$. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q \in]-1,1[$. Elle est donc **convergente**.
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$
2. $u_n = \ln(2n^2 - n) - \ln(3n+1)$
En utilisant les propriétés du logarithme ($\ln A - \ln B = \ln \frac{A}{B}$), on a :
$$u_n = \ln\left(\frac{2n^2-n}{3n+1}\right) = \ln\left(\frac{n^2(2-\frac{1}{n})}{n(3+\frac{1}{n})}\right) = \ln\left(n \cdot \frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}\right)$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}$. Par conséquent, l'argument du logarithme tend vers $+\infty$ par produit. La suite (u_n) est donc **divergente**.
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$
3. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$
C'est une forme indéterminée $+\infty - \infty$. On utilise la quantité conjuguée :
$$u_n = \frac{(n^2+n+1)-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}+\sqrt{n^2(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}}$$
En simplifiant par n (car $n > 0$) :
$$u_n = \frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}$$
Par somme de limites, le dénominateur tend vers $1+1=2$. La suite est **convergente**.
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{2} = 1$$

4. $u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2}$
On sait que $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Donc $n! \leq n^n$. Par croissance du logarithme :

$$0 \leq \ln(n!) \leq \ln(n^n) = n \ln n$$

En divisant par n^2 :

$$0 \leq u_n \leq \frac{n \ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, la suite est **convergente**.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

5. $u_n = \left(2\sin\frac{1}{n} + \frac{3}{4}\cos n\right)^n$
On cherche à majorer le terme à l'intérieur de la parenthèse pour n assez grand. On sait que $|\cos n| \leq 1$ et $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ quand $n \to +\infty$. Pour n suffisamment grand (par exemple $n \geq 100$), $2\sin\frac{1}{n} \leq \frac{1}{8}$ (Par ce que $\sin\frac{1}{n} \to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$) .

$$\left|2\sin\frac{1}{n} + \frac{3}{4}\cos n\right| \leq \frac{1}{8} + \frac{3}{4}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{8} + \frac{3}{4})^n = 0$, (on a $\frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{7}{8} < 1$ Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Exercice 3. 1. Encadrement fondamental. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la partie entière $\lfloor x \rfloor$ est définie par l'encadrement :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

2. Encadrement de la suite u_n. Soit $u_n = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$. En sommant l'encadrement précédent pour chaque terme, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}(kx - 1) < n^2 u_n \leq \sum_{k=1}^{n} kx$$

En utilisant la formule $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, on déduit :

$$x\frac{n(n+1)}{2} - n < n^2 u_n \leq x\frac{n(n+1)}{2}$$

3. Limite et Convergence. En divisant par n^2, on obtient l'encadrement de u_n :

$$\frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} < u_n \leq \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Les deux membres encadrant u_n convergent vers $\frac{x}{2}$ quand $n \to +\infty$.
D'après le **théorème des gendarmes** :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{x}{2}$$

4. Conclusion sur la densité. Puisque chaque u_n est un nombre rationnel (somme d'entiers divisée par n^2) et que l'on peut approcher tout réel par une suite de tels rationnels, on en déduit que $\mathbb{Q}$ **est dense dans** $\mathbb{R}$.

Exercice 4. 1. Calculons la différence $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3(n+1)-1}{2(n+1)+3} - \frac{3n-1}{2n+3}, \\ &= \frac{3n+2}{2n+5} - \frac{3n-1}{2n+3} \end{aligned}$$

Mise au même dénominateur :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(3n+2)(2n+3) - (3n-1)(2n+5)}{(2n+5)(2n+3)}, \\ &= \frac{(6n^2+9n+4n+6) - (6n^2+15n-2n-5)}{(2n+5)(2n+3)}, \\ &= \frac{13n+6-(13n-5)}{(2n+5)(2n+3)}, \\ &= \frac{11}{(2n+5)(2n+3)}. \end{aligned}$$

Comme $n \geq 0$, le dénominateur est positif. On a $u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite (u_n) est **strictement croissante**.

On peut réécrire u_n en faisant apparaître le dénominateur au numérateur :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\frac{3}{2}(2n+3) - \frac{9}{2} - 1}{2n+3}, \\ &= \frac{\frac{3}{2}(2n+3) - \frac{11}{2}}{2n+3}, \\ &= \frac{3}{2} - \frac{11}{2(2n+3)}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{11}{2(2n+3)} > 0$, on a $u_n < \frac{3}{2}$ pour tout n. La suite donc est **majorée par** $\frac{3}{2}$.

2. Démontrer la limite par la définition

Rappel de la définition :

$$\lim u_n = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - L| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche N tel que pour tout $n \geq N$:

$$\left| \frac{3n-1}{2n+3} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$$

Alors

$$\left| \frac{2(3n-1) - 3(2n+3)}{2(2n+3)} \right| = \left| \frac{6n-2-6n-9}{4n+6} \right| = \left| \frac{-11}{4n+6} \right| = \frac{11}{4n+6}$$

On veut donc :

$$\begin{aligned} \frac{11}{4n+6} < \varepsilon &\iff \frac{4n+6}{11} > \frac{1}{\varepsilon}, \\ &\iff 4n+6 > \frac{11}{\varepsilon}, \\ &\iff n > \frac{1}{4}\left(\frac{11}{\varepsilon} - 6\right). \end{aligned}$$

Il suffit de choisir $N = \max\left(0, \left\lfloor \frac{1}{4}\left(\frac{11}{\varepsilon} - 6\right)\right\rfloor + 1\right)$.

Ainsi, pour tout $n \geq N$, l'inégalité $|u_n - \frac{3}{2}| < \varepsilon$ est vérifiée. Ceci prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{3}{2}$.

Exercice 5. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1, \qquad u_0 \in \mathbb{R}.$$

1. (a) cas $u_0 \leq 2$. Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leq 2.$$

Posons la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad u_n \leq 2.$$

— **Initialisation :** Par hypothèse, $u_0 \leq 2$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
— **Hérédité :** Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire $u_n \leq 2$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \leq \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leq 2.$$

Étudions maintenant la monotonie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = \frac{1}{2}(2 - u_n).$$

Comme $u_n \leq 2$, on a $2 - u_n \geq 0$, d'où

$$u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante. Puisque la suite (u_n) est croissante et majorée par 2. Par le théorème de convergence des suites monotones, il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L.$$

En passant à la limite dans la relation de récurrence,

$$L = \frac{1}{2}L + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad L = 2.$$

(b) Étude du cas $u_0 \geq 2$. Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geq 2.$$

Posons

$$\mathcal{Q}(n) : \quad u_n \geq 2.$$

— **Initialisation :** $u_0 \geq 2$, donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.
— **Hérédité :** Supposons $u_n \geq 2$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \geq \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2.$$

Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geq 2.$$

Pour la monotonie, on a toujours

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(2 - u_n).$$

Comme $u_n \geq 2$, on obtient $2 - u_n \leq 0$, donc

$$u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante. Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2. Elle est donc convergente vers une limite L vérifiant

$$L = \frac{1}{2}L + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad L = 2.$$

2. Méthode explicite. On pose

$$v_n = u_n - 2.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \left(\frac{1}{2}u_n + 1\right) - 2 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison

$$q = \frac{1}{2}.$$

On en déduit

$$v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = (u_0 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

et par conséquent

$$u_n = 2 + (u_0 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0,$$

on obtient

$$\forall u_0 \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = 2.$$

Exercice 6. Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. On a alors $y - x > 0$. D'après la **propriété archimédienne** de $\mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad n\varepsilon > 1$$

En posant $\varepsilon = y - x$, il existe un entier naturel non nul n tel que $n(y - x) > 1$, ce qui équivaut à :

$$ny - nx > 1 \tag{1}$$

2. Densité des rationnels ($\mathbb{Q}$). Posons l'entier $m = \lfloor nx \rfloor + 1$. Par définition de la partie entière, nous avons l'encadrement :

$$\lfloor nx \rfloor \leq nx < \lfloor nx \rfloor + 1$$

D'où :

$$m - 1 \leq nx < m$$

Démontrons que le rationnel $q = \frac{m}{n}$ répond à la condition $x < q < y$:

(a) **D'une part :** $nx < m \implies x < \frac{m}{n}$.

(b) **D'autre part :** $m \leq nx + 1$. D'après l'inéquation (1), on a $1 < ny - nx$, donc :

$$m \leq nx + 1 < nx + (ny - nx) = ny$$

On en déduit $m < ny$, soit $\frac{m}{n} < y$.

Alors $x < \frac{m}{n} < y$. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3. Densité des irrationnels ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Soient $x < y$. Appliquons le résultat précédent aux réels $(x - \sqrt{2})$ et $(y - \sqrt{2})$:

$$\exists q \in \mathbb{Q}, \quad x - \sqrt{2} < q < y - \sqrt{2}$$

En ajoutant $\sqrt{2}$ à chaque membre :

$$x < q + \sqrt{2} < y$$

Soit $\alpha = q + \sqrt{2}$. Comme $q \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, alors $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Alors $\exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x < \alpha < y$.

4. Caractérisation séquentielle. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) **Cas des rationnels :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in \mathbb{Q}$ tel que $x - \frac{1}{n} < x_n < x$. Par le théorème des gendarmes, comme $\lim_{n\to\infty}(x - \frac{1}{n}) = x$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

(b) **Cas des irrationnels :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x - \frac{1}{n} < y_n < x$. De la même manière :

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = x$$

Exercice 7. 1. L'idée est de choisir un voisinage suffisamment petit autour de chaque limite pour que ces voisinages ne se chevauchent pas.

Posons $\varepsilon = \frac{\ell' - \ell}{3}$. Comme $\ell < \ell'$, on a $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite :
Pour (u_n) : $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Ceci implique en particulier :

$$u_n < \ell + \varepsilon.$$

Pour (v_n) : $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, |v_n - \ell'| < \varepsilon.$$

Ceci implique en particulier :

$$v_n > \ell' - \varepsilon.$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$, on a :

$$u_n < \ell + \varepsilon \quad \text{et} \quad v_n > \ell' - \varepsilon$$

Comparons $\ell + \varepsilon$ et $\ell' - \varepsilon$. Par construction de ε :

$$(\ell' - \varepsilon) - (\ell + \varepsilon) = \ell' - \ell - 2\varepsilon = \ell' - \ell - \frac{2}{3}(\ell' - \ell) = \frac{1}{3}(\ell' - \ell) > 0$$

On en déduit que $\ell + \varepsilon < \ell' - \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geq N$:

$$u_n < \ell + \varepsilon < \ell' - \varepsilon < v_n$$

D'où $u_n < v_n$.

2. La réciproque est fausse. Si l'on suppose que pour tout n, $u_n < v_n$, on ne peut conclure que $\ell \leq \ell'$ (inégalité large). L'inégalité stricte peut ne pas être conservée à la limite.

   Contre-exemple : Soient les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = 0 \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n}$$

   On a bien $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ car $0 < \frac{1}{n}$. Cependant :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

   Ici $\ell = \ell' = 0$, donc la condition $\ell < \ell'$ n'est pas vérifiée.

Exercice 8.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_{2n} \to \ell$, $\exists N_1$ tel que

$$\forall n \geq N_1, |u_{2n} - \ell| < \varepsilon.$$

   et $u_{2n+1} \to \ell$, $\exists N_2$ tel que

$$\forall n \geq N_2, |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon.$$

   Posons $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$.

$$\forall k \geq N, |u_k - \ell| < \varepsilon.$$

   La suite (u_n) converge vers ℓ.

2. Considérons la suite $u_n = (-1)^n$.
   $u_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1$.
   $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \to -1$.
   Les deux suites extraites convergent, mais vers des limites différentes. Elle est donc **divergente**.

3. Supposons que $u_{2n} \to \ell_1$, $u_{2n+1} \to \ell_2$ et $u_{3n} \to \ell_3$.
   * La suite (u_{6n}) est une suite extraite de (u_{2n}) (car $6n = 2(3n)$) et de (u_{3n}) (car $6n = 3(2n)$). Par unicité de la limite, $\ell_1 = \ell_3$.
   * La suite (u_{6n+3}) est une suite extraite de (u_{2n+1}) (car $6n + 3 = 2(3n + 1) + 1$) et de (u_{3n}). Donc $\ell_2 = \ell_3$.

   On en déduit $\ell_1 = \ell_2$. D'après la question 1, la suite (u_n) converge.

4. On a
   $u_{2n} = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$. Or $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} = 0$, donc $\lim u_{2n} = \cos(0) = 1$.
   $u_{2n+1} = \cos\left((2n + 1)\pi + \frac{\pi}{2n+1}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)$. Or $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n+1} = 0$, donc $\lim u_{2n+1} = -1$.
   Les limites sont différentes, donc la suite (u_n) **diverge**.

5. Soit $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.
   (a) $u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} = \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} < 0$ (décroissante).
   $u_{2n+3} - u_{2n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+4} = \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} > 0$ (croissante).
   (b) $u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} = \frac{-1}{2n+2} \to 0$.
   Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ. Ainsi (u_n) converge vers ℓ.

6. On a $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$.
   On a

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} \leq v_{n+1}.$$

   Si $u_n \leq v_n$, alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{u_n^2} = u_n$ (croissante) et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \leq \frac{v_n+v_n}{2} = v_n$ (décroissante).
   Puisque $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$. Les deux suites sont monotones et bornées, elles convergent vers ℓ_u et ℓ_v.
   En passant à la limite dans $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$, on obtient $\ell_v = \frac{\ell_u+\ell_v}{2} \implies \ell_u = \ell_v$.

Exercice 9. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On pose $u_n = \cos(n\theta)$ et $v_n = \sin(n\theta)$.

1. D'après les formules d'addition :

$$u_{n+1} = u_n \cos\theta - v_n \sin\theta$$
$$v_{n+1} = v_n \cos\theta + u_n \sin\theta$$

Puisque $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, $\sin\theta \neq 0$. On peut exprimer chaque terme en fonction de l'autre :

$$v_n = \frac{u_n \cos\theta - u_{n+1}}{\sin\theta} \quad \text{et} \quad u_n = \frac{v_{n+1} - v_n \cos\theta}{\sin\theta}$$

Par les théorèmes d'opérations sur les limites, si l'une des suites converge, l'autre converge également.

2. Supposons par l'absurde que $(u_n) \to \ell$ et $(v_n) \to \ell'$.

   Par la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on a $\ell^2 + \ell'^2 = 1$.

   En passant à la limite dans les relations de récurrence :

$$\ell = \ell\cos\theta - \ell'\sin\theta \implies \ell(1-\cos\theta) = -\ell'\sin\theta$$

$$\ell' = \ell'\cos\theta + \ell\sin\theta \implies \ell'(1-\cos\theta) = \ell\sin\theta$$

   En élevant au carré et en additionnant :

$$(\ell^2 + \ell'^2)(1-\cos\theta)^2 = (\ell^2 + \ell'^2)\sin^2\theta$$

Comme $\ell^2 + \ell'^2 = 1$, on obtient $(1-\cos\theta)^2 = \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$. D'où $1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, soit $2\cos^2\theta - 2\cos\theta = 0$.

   Cela implique $\cos\theta(\cos\theta - 1) = 0$. Donc $\cos\theta = 0$ ou $\cos\theta = 1$.

   * Si $\cos\theta = 1$, alors $\theta \in 2k\pi$, ce qui est exclu par l'énoncé.
   * Si $\cos\theta = 0$, alors $\sin^2\theta = 1$. Les relations limites deviennent $\ell = -\ell'\sin\theta$ et $\ell' = \ell\sin\theta$, ce qui impose $\ell = \ell' = 0$, contredisant $\ell^2 + \ell'^2 = 1$.

Les suites divergent.

Exercice 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. **Démontrer que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$:**

On a $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Cette somme comporte n termes. Comme pour tout $k \in \{n+1, \dots, 2n\}$, $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$, on a :

$$H_{2n} - H_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

2. **Limite de (H_n) :**

La suite (H_n) est croissante car $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0$. Si elle convergeait vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim(H_{2n} - H_n) = \ell - \ell = 0.$$

Ceci contredirait l'inégalité $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$. Ainsi, la suite est croissante et non majorée, donc

$$\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty.$$
