Analyse 1

Série N°1

Propriétés élémentaires du corps des réels

Exercice 1.
1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$. De même, si $r \neq 0$ alors $r \cdot x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
3. En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.
4. Soient $x, y \in \mathbb{Q}_+$ tels que $\sqrt{x}, \sqrt{y} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
5. En déduire que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2. Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Exercice 3.
1. Démontrer que :

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

2. Trouver une formule similaire pour $\max(x, y, z)$.

Exercice 4. Déterminer (s'ils existent) les majorants, minorants, borne supérieure, borne inférieure, plus grand élément et plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0, 1] \cap \mathbb{Q}, \quad]0, 1[\cap \mathbb{Q}, \quad \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Exercice 5. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que : $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$. Démontrer que A est majorée, B est minorée et $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 6. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une application croissante. On note $E = \{x \in [0, 1] : f(x) \geq x\}$.
1. Montrer que E admet une borne supérieure b.
2. Prouver que $f(b) = b$.

Exercice 7. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On note $B = \{|x - y| : (x, y) \in A^2\}$.
1. Justifier que B est majorée.
2. On note $\delta(A)$ la borne supérieure de B. Prouver que $\delta(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 8.
1. Soient $a < b$ deux réels.
   (a) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $a < c < b$.
   (b) Existe-t-il $q \in \mathbb{Q}$ tel que $a < q < b$? Justifier.
   (c) Existe-t-il $I \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $a < I < b$? Justifier.
2. Montrer que $]a, b[$ contient une infinité de rationnels et d'irrationnels.

Exercice 9. Montrer que $\{r^3 \mid r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.