Analyse 1

Série N°2

Généralités sur les suites

Exercice 1. Déterminer la limite s'il existe des suites suivantes :

$$a_n = \frac{n+(-1)^n}{\sqrt{3}n+2(-1)^n}, \quad b_n = \frac{1+2^n}{1-3^n}, \quad c_n = \cos(\pi n),$$
$$d_n = \frac{\cos\left(\sqrt[n]{\pi^2 e^{\ln n^n}}\right)}{\sqrt{n^2+2}}, \quad e_n = \frac{e^n+\pi^n}{e^n-\pi^n}, \quad f_n = \left(\sin\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$
$$g_n = \sqrt[n+1]{2+(-1)^n}.$$

Exercice 2. Étudier la nature des suites (u_n) suivantes et donner leur limite éventuelle.

1. $u_n = 3^n e^{-3n}$
2. $u_n = \ln(2n^2-n) - \ln(3n+1)$
3. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$
4. $u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2}$
5. $u_n = \left(2\sin\frac{1}{n} + \frac{3}{4}\cos n\right)^n$

Exercice 3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Donner l'encadrement qui définit la partie entière $\lfloor x \rfloor$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \cdots + \lfloor nx\rfloor}{n^2}$. Donner un encadrement de $n^2 u_n$.
   (en utilisant $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.)
3. En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.
4. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4. On considère la suite de nombres réels (u_n) définie par $u_n = \frac{3n-1}{2n+3}$ pour tout entier n.

1. Démontrer que cette suite est croissante et majorée.
2. Démontrer, en utilisant la définition de la limite d'une suite, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{2}$.

Exercice 5. Soit (u_n) une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ et la donnée de u_0.

1. (a) Montrer que si $u_0 \leq 2$, alors pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq 2$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
2. (a) Montrer que si $u_0 \geq 2$, alors pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 2$ et que la suite est monotone.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
3. (a) On pose $v_n = u_n - 2$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   (b) En déduire une expression de u_n en fonction de n et u_0. Retrouver le résultat des deux premières questions.

Exercice 6. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.

1. Vérifier qu'il existe un entier naturel n tel que $1 < n(y - x)$.
2. Soit $m = E(nx) + 1$. Montrer que
$$x < \frac{m}{n} < y.$$
3. En utilisant 2), montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x < \alpha < y$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) telle que (x_n) converge vers x.

Exercice 7. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. On note ℓ et ℓ' les limites respectives de (u_n) et (v_n). On suppose que $\ell < \ell'$.

1. Montrer qu'il existe N tel que $\forall n \geq N$, $u_n < v_n$.
2. Réciproque ?

Exercice 8. Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. On suppose que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ. Montrer que (u_n) converge vers ℓ.
2. Donner un exemple de suite telle que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent mais (u_n) diverge.
3. On suppose que les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que la suite (u_n) converge.
4. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \cos\Big((n + \frac{1}{n})\pi\Big)$ est divergente.
5. Soit (u_n) la suite définie par :
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$
Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que (u_n) converge.
6. Soient $a, b > 0$ et (u_n), (v_n) les suites définies par :
$$u_0 = a, \quad v_0 = b, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$
Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes vers une même limite appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b.

Exercice 9. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq n\pi$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
$$u_n = \cos(n\theta), \quad v_n = \sin(n\theta).$$

1. Montrer que (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge (penser à une relation entre les limites éventuelles).
2. En déduire que (u_n) et (v_n) divergent. (On pourra supposer le contraire, utiliser les relations démontrées dans 1) et remarquer que si $\ell = \lim u_n$, $\ell' = \lim v_n$ alors $\ell^2 + \ell'^2 = 1$).

Exercice 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.
