Analyse 1

Série N°3

Limites et fonctions continues

Exercice 1. Définition $\epsilon - \delta$
En utilisant la définition formelle de la limite ($\epsilon - \delta$), démontrer les assertions suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 1) = 5$.
2. $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$.
3. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 2. Prolongement par continuité
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x - 1}$$

1. Calculer la limite de f en 1.
2. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Si oui, définir ce prolongement.

Exercice 3. Théorème des Valeurs Intermédiaires

1. Montrer que l'équation $x^3 + x^2 - 1 = 0$ admet au moins une solution réelle dans l'intervalle $[0, 1]$.
2. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.
3. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer qu'il existe $c \in [a, \frac{a+b}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{b-a}{2})$.

Exercice 4. Continuité et densité
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = 0$. Montrer que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y)$.
   (a) Calculer $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis pour $n \in \mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = r \cdot f(1)$.
   (c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \cdot x$ avec $a = f(1)$.

Exercice 5. Comportement aux bornes
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que f admet une limite finie L en $+\infty$.

1. Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$.
2. La fonction atteint-elle nécessairement ses bornes ? (Donner un exemple ou un contre-exemple).
