Analyse 1

Série N°4

Fonction dérivable et application

Exercice 1. — Théorème de Rolle et racines de polynômes
Soit $P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n)$ un polynôme de degré $n \geq 2$, où les α_i sont des réels distincts tels que :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$$

1. Montrer que le polynôme dérivé P' admet au moins $n - 1$ racines réelles distinctes. En déduire qu'elles sont toutes réelles.
2. On considère la fonction auxiliaire $f(x) = P(x)e^x$. En utilisant f, démontrer que le polynôme $S = P + P'$ admet également au moins $n - 1$ racines réelles distinctes.
3. Démontrer enfin que toutes les racines de $P + P'$ sont réelles.

Exercice 2.

1. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation :

$$\tan(x) + \frac{\pi}{4} = 0$$

admet une solution unique sur l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

2. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction f définie par :

$$f(x) = e^x \sin(x) - 1$$

sur l'intervalle $[0, \pi]$, montrer que l'équation $\sin(x) + \cos(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]0, \pi[$.

Exercice 3. Soit $n \geq 2$ un entier et $p, q \in \mathbb{R}$. On considère le polynôme défini par :

$$P(X) = X^n + pX + q$$

1. Démontrer que P admet au plus 3 racines réelles.
2. On suppose que n est pair. Démontrer que P admet au plus 2 racines réelles.

Exercice 4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ possède un nombre fini de solutions réelles.

Exercice 5. Théorème des Accroissements Finis

1. Démontrer que pour tous réels x et y :

$$|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$$

2. Démontrer que pour tout $x \geq 0$:

$$x \leq e^x - 1 \leq xe^x$$

3. Montrer que pour tous réels x et y :

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

Exercice 6. 1. Soit $f(t) = \ln(t)$. En appliquant le TAF sur $[k, k+1]$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

2. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Exercice 7. Soit

$$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \ln(1+x).$$

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

1. (a) Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$. Montrer que $\forall x \in [0, +\infty[, \quad g'(x) < 0$, et en déduire qu'il existe un unique $x \in [0, +\infty[$ tel que $f(x) = x$.
   (b) Montrer que $\forall x > 0, \quad g(x) < 0$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n$ et que $u_n > 0$.
2. Calculer f'. Montrer que $\forall x \in [0, 1], \quad 0 < f'(x) \leq 1$.
   On admettra pour la suite que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, u_n], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $c_n \in]0, u_n[$ tel que :

$$u_{n+1} - 0 = f'(c_n)(u_n - 0),$$

   puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n|$.
4. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   En déduire la limite de la suite (u_n) quand $n \to +\infty$.
