**Examen d'Analyse 1**

## Durée 1h30

---

**Exercice 1.** 1. Donner le nombre $0,336433643364\ldots$ sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

2. (a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

(En utilisant TAF pour la fonction $f(t) = \ln(t)$ sur $[x, x+1]$).)

(b) En déduire la limite de la suite dont le terme général est :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

3. Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. Les parties suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, déterminer leurs bornes supérieures et inférieures.

(a) $A = \{a + bn \mid n \in \mathbb{N}\}$

(b) $B = \left\{(-1)^n a + \frac{b}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$

(c) $C = \left\{a + \frac{(-1)^n b}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$

---

**Exercice 2. Théorème du point fixe de Banach**

Soient $a < b$ deux réels, $f : [a,b] \to [a,b]$ et $\lambda \in ]0,1[$. On suppose que $f$ est contractante : pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$, $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x-y|$. Le but de cet exercice est de montrer que $f$ possède un unique point fixe : $\exists! x^* \in [a,b]$ tel que $f(x^*) = x^*$.

On fixe $u_0 \in [a,b]$ et on considère la suite définie récursivement par $u_n = f(u_{n-1})$ pour $n \geq 1$.

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \lambda^n |u_1 - u_0|$.

(b) En utilisant le point précédent, montrer que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $|u_{n+m} - u_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|u_1 - u_0|$.

(c) En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers une limite $\ell \in [a,b]$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(\ell) - \ell| \leq |f(\ell) - f(u_n)| + |u_{n+1} - \ell|$. En déduire que $f(\ell) = \ell$, ce qui montre l'existence d'un point fixe.

3. Supposer que $x^*$ et $y^*$ soient deux points fixes. Montrer que $|x^* - y^*| \leq \lambda|x^* - y^*|$ et donc que $x^* = y^*$.

---

**Exercice 3.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Le but de cet exercice est de montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ;

(ii) il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = cx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Vérifier tout d'abord que (ii) implique (i), puis prouver que (i) implique (ii) en procédant comme suit :

a) Montrer que $f(0) = 0$.

b) Montrer que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Montrer que $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

d) Montrer que $f(n) = nf(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $c = f(1)$.

e) Montrer que $f\left(\frac{1}{n}\right) = c \cdot \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

f) Montrer que $f(q) = c \cdot q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

g) Utiliser la continuité de $f$ pour en conclure que $f(x) = c \cdot x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

---

**Exercice 4.** Soient $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable sur $I$. Soient $a$ et $b$ deux éléments de $I$ tels que $a < b$. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}(f'(a) + f'(x)) + K(x-a)^3$$

où $K$ est le nombre réel tel que $g(b) = 0$.

1. Montrer que $g$ est deux fois dérivable sur $I$, et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in I$.
2. Montrer qu'il existe un nombre $c \in ]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.
3. Montrer qu'il existe un nombre $\theta \in ]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f'''(\theta)$$

---