Série d'Exercices : Intégration et Fonctions en Escalier

Mathématiques Générales

Partie 1 : Fonctions en escalier et Intégrales

Exercice 1 (Identification et Subdivisions adaptées) *Soit la fonction φ définie sur l'intervalle $[-2, 3]$ par :*

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1 & si\ -2 \leq x < 0 \\ 2 & si\ x = 0 \\ 3 & si\ 0 < x < 2 \\ 1 & si\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

1. *La fonction φ est-elle une fonction en escalier sur $[-2, 3]$? Justifiez en revenant à la définition.*
2. *Exhiber une subdivision S adaptée à φ.*
3. *Calculer $I(\varphi) = \int_{-2}^{3} \varphi(x)\, dx$.*
4. *La valeur de la fonction en $x = 0$ modifie-t-elle la valeur de l'intégrale ? Pourquoi ?*

Exercice 2 (Propriétés de l'intégrale : Linéarité et Chasles) *Soient f et g deux fonctions en escalier définies sur $[0, 5]$. On sait que :*

$$\int_0^2 f(t)dt = 3, \quad \int_2^5 f(t)dt = -1, \quad et \quad \int_0^5 g(t)dt = 4$$

1. *Calculer $\int_0^5 f(t)dt$.*
2. *Calculer l'intégrale de la combinaison linéaire : $J = \int_0^5 (2f(t) - 3g(t))\, dt$.*
3. *Si pour tout $t \in [0, 5]$, $f(t) \leq g(t)$, que peut-on dire de la relation entre leurs intégrales ? Ce résultat est-il cohérent avec les valeurs données ci-dessus ?*

Exercice 3 (Contre-exemple classique) *Soit la fonction de Dirichlet $D : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$D(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer que D n'est pas une fonction en escalier. Indication : Raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe une subdivision adaptée et utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Partie 2 : Sommes de Darboux et de Riemann

Exercice 4 (Sommes de Darboux) *Soit $f(x) = x$ définie sur $[0, 1]$. On considère la subdivision régulière $S_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\}$.*

1. *Déterminer $m_k = \inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$ et $M_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$ sur chaque sous-intervalle.*
2. *Exprimer la somme de Darboux inférieure $\sigma(f, S_n)$ et la somme de Darboux supérieure $\Sigma(f, S_n)$ en fonction de n.*
3. *Rappel : $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrer que :*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, S_n) = \lim_{n\to\infty} \Sigma(f, S_n) = \frac{1}{2}$$

4. *Que peut-on conclure quant à l'intégrabilité de la fonction f ?*

Exercice 5 (Sommes de Riemann et Limites de suites) *L'objectif est de calculer la limite de la suite (u_n) définie par :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

1. *Mettre u_n sous la forme $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ en identifiant la fonction f.*
2. *Reconnaitre une somme de Riemann associée à f sur l'intervalle $[0, 1]$.*
3. *La fonction f étant continue (donc intégrable), calculer $\int_0^1 f(x)dx$.*
4. *En déduire la limite de la suite (u_n).*

Exercice 6 (Théorique : Lien Darboux/Riemann) *Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$.*

1. *Rappeler la définition d'une Somme de Riemann $R(f, S, \xi)$ associée à une subdivision S et des points marqués ξ.*
2. *Montrer que pour toute subdivision S, on a l'inégalité :*

$$\sigma(f, S) \leq R(f, S, \xi) \leq \Sigma(f, S)$$

où s et S désignent respectivement les sommes de Darboux inférieures et supérieures.