Série d'Exercices : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Mathématiques Générales

Partie 1 : Division Euclidienne et Algorithme d'Euclide

Exercice 1 (PGCD, PPCM et Algorithme d'Euclide) *Soient les entiers* $a = 462$ *et* $b = 65$.

1. *Effectuer la division euclidienne de a par b. Préciser le quotient et le reste.*
2. *Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le* $pgcd(462, 65)$.
3. *En déduire le* $ppcm(462, 65)$ *en utilisant la relation entre pgcd et ppcm.*
4. *Les nombres a et b sont-ils premiers entre eux ?*

Exercice 2 (Divisibilité) *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que si un nombre divise à la fois* $15n + 4$ *et* $10n + 3$, *alors il divise* 5.

Partie 2 : Théorèmes de Bézout et Gauss

Exercice 3 (Identité de Bézout et Euclide étendu) *On considère l'équation*

$$37u + 11v = 1$$

où $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$.

1. *Justifier pourquoi cette équation admet des solutions entières.*
2. *À l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu (remontée de l'algorithme d'Euclide), trouver une solution particulière* (u_0, v_0).

Exercice 4 (Équations Diophantiennes et Gauss) *On cherche à résoudre dans* $\mathbb{Z}^2$ *l'équation*

$$(E) : 37x + 11y = 5.$$

1. *En utilisant la solution particulière trouvée à l'exercice précédent, donner une solution particulière de* (E).
2. *Soit* (x, y) *une solution quelconque. Montrer que* $37(x - x_0) = -11(y - y_0)$.
3. *En utilisant le* ***théorème de Gauss****, déterminer la forme générale des solutions de* (E).

Partie 3 : Congruences et Petit Théorème de Fermat

Exercice 5 (Calculs modulaires) *Soit* $p = 5$ *(un nombre premier).*

1. *Déterminer le reste de la division euclidienne de* 2023 *par* 5.
2. *Montrer que* $13 \equiv -1[7]$. *En déduire le reste de la division euclidienne de* 13^{2024} *par* 7.

Exercice 6 (Petit Théorème de Fermat) *Soit* $p = 11$ *(un nombre premier).*

1. *Calculer* $3^{10}[11]$.
2. *En déduire sans calculatrice le reste de la division de* 3^{2025} *par* 11.
3. *Trouver l'inverse de* 4 *dans l'anneau quotient* $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

Partie 4 : Primalité et Fonction d'Euler

Exercice 7 (Décomposition et Diviseurs) *Soit l'entier* $n = 360$.

1. *Donner la décomposition en facteurs premiers de* n.
2. *Quel est le nombre total de diviseurs de* n *?*

Exercice 8 (Fonction indicatrice d'Euler) *La fonction indicatrice d'Euler* $\varphi(n)$ *compte le nombre d'entiers inférieurs à* n *et premiers avec* n.

1. *Calculer* $\varphi(13)$ *(pour un nombre premier).*
2. *Calculer* $\varphi(10)$.
3. *Sachant que si* $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, *alors* $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_i})$, *calculer* $\varphi(360)$.