UNIVERSITÉ MOHAMED V
FACULTÉ DES SCIENCES RABAT
Département de Mathématiques

Filière :

Sciences Mathématiques (SM)

Analyse I

Analyse Réelle

Par
Prof : Mohamed Najib LAATABI
Email :laatabinajib43@gmail.com

Toute remarque de votre part est la bienvenue.
Si vous identifiez une erreur, veuillez la signaler.

Année Universitaire : **2025-2026**

Table des matières

1 Nombres Réels **1**

2 Suites numériques **1**

3 Limites et fonctions continues **1**

4 Fonctions dérivables **1**

4.1 Définition de la Dérivabilité 1

4.1.1 Opérations sur les fonctions dérivables 3

4.2 Dérivabilité de la composée et de la réciproque 4

4.2.1 Dérivée de la fonction composée 4

4.2.2 Dérivée de la fonction réciproque 4

4.3 Dérivabilité à gauche et à droite 5

4.4 Dérivées successives 6

4.5 Extremum local et Théorème de Rolle 7

4.5.1 Extremum local 7

4.5.2 Théorème de Rolle 8

4.6 Théorème des accroissements finis et applications 9

4.6.1 Théorème des Accroissements Finis (TAF) 9

4.6.2 Sens de variation et dérivée 10

4.6.3 Inégalité des Accroissements Finis (IAF) 11

4.7 Applications avancées et Convexité 12

4.7.1 Règle de L'Hôpital 12

4.7.2 Convexité et dérivée seconde 12

Symboles et abréviations

Symbole	Description / Signification	Chapitre
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	Ensembles des entiers (nat., rel.), rationnels et réels	1
$\lvert x \rvert$	Valeur absolue de x	1
$\sup(E), \inf(E)$	Borne supérieure et borne inférieure de l'ensemble E	1
$E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$	Partie entière du réel x	1
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Suite numérique	2
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	Limite d'une suite	2
$\forall, \exists, \implies$	Pour tout, il existe, implique (Logique)	2
ϵ (epsilon)	Un réel strictement positif aussi petit que l'on veut	2
$f : I \to \mathbb{R}$	Fonction réelle définie sur un intervalle I	3
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	Limite de la fonction f quand x tend vers x_0	3
$f \circ g$	Composition des fonctions f et g	3
f^{-1}	Fonction réciproque de f	3
$f'(x)$	Dérivée première de f au point x	4
$f'_g(x), f'_d(x)$	Dérivée à gauche et dérivée à droite	4
$f^{(n)}(x)$	Dérivée d'ordre n (dérivées successives)	4
TAF / IAF	Théorème / Inégalité des Accroissements Finis	4
f''	Dérivée seconde (utilisée pour la convexité)	4

Chapitre 4

Fonctions dérivables

4.1 Définition de la Dérivabilité

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.

Définition 4.1.1: Dérivabilité en un point

On dit que f est **dérivable en** x_0 si

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a une limite finie quand x tend vers x_0.

Cette limite est notée $f'(x_0)$ et s'appelle la **dérivée de** f **en** x_0. On a alors :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

On dit que f est **dérivable sur** I si, quel que soit $x_0 \in I$, f est dérivable en x_0. Dans ce cas, la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ qui à x associe $f'(x)$ s'appelle **l'application dérivée** de f.

Définition 4.1.2: Tangente

La droite qui passe par les points distincts $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ a pour coefficient directeur :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

À la limite, on trouve que le coefficient directeur de la tangente est $f'(x_0)$. Une **équation de la tangente** au point $(x_0, f(x_0))$ est donc :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Dire que f est dérivable en x_0, c'est dire que la courbe de f peut être approchée localement par une droite (voir Figure 4.1).

L'équation de la tangente est donnée par la partie affine du développement :

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

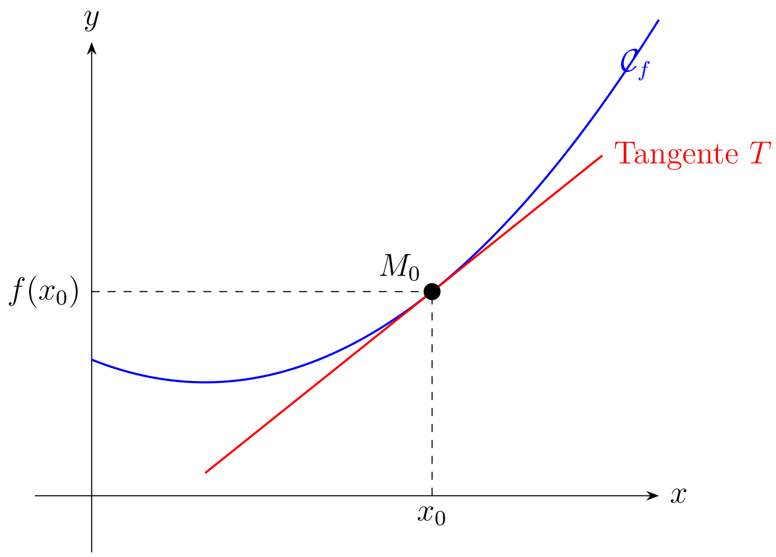

FIGURE 4.1 – La tangente (en rouge) réalise la meilleure approximation affine locale de la courbe $\mathcal{C}_f$ au point x_0.

Exemple 1:La fonction carrée

Considérons la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Cherchons la dérivée en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque.

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \quad \text{(Développement)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (2x_0 + h) \quad \text{(Simplification par } h\text{)} \\
&= 2x_0
\end{aligned}$$

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$.

Définition 4.1.3: Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ (qui est alors égal à $f'(x_0)$) et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ avec :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ell + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

Proposition 4.1.1:

Si f est dérivable en un point $x_0 \in I$, alors f est continue en x_0.

Démonstration. Supposons que f est dérivable en x_0. D'après la Proposition 4.1.3 , nous pouvons écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

où $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Étudions la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0, on a : $\lim_{x \to x_0}(x-x_0)f'(x_0) = 0 \times f'(x_0) = 0$ et $\lim_{x \to x_0}(x - x_0)\varepsilon(x) = 0 \times 0 = 0$. Par somme de ces limites, on obtient :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Par définition, la fonction f est donc continue en x_0. ■

4.1.1 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème 4.1.1:

Soit $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soient f et g deux fonctions réelles définies sur I et dérivables en x_0. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une constante.
Alors, les fonctions $f+g$, λf et fg sont dérivables en x_0 et on a les formules suivantes :

Somme : $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Produit par un scalaire : $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

Produit : $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

De plus, si $g(x_0) \neq 0$, la fonction quotient $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Exemple 2:

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x) = \frac{e^x}{x}$$

Ici, nous avons $f(x) = e^x$ et $g(x) = x$. Les deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et $g(x) \neq 0$.

$f'(x) = e^x$

$g'(x) = 1$

Appliquons la formule du quotient :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\ &= \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{e^x(x-1)}{x^2} \end{aligned}$$

4.2 Dérivabilité de la composée et de la réciproque

4.2.1 Dérivée de la fonction composée

Théorème 4.2.1:

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : f(I) \to \mathbb{R}$ deux fonction, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$. Alors, la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$$

Démonstration. Puisque f est dérivable en x_0, on a : $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)(f'(x_0) + \varepsilon_f(x))$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_f(x) = 0$.

De même, puisque g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, on a : $g(y) = g(y_0) + (y - y_0)(g'(y_0) + \varepsilon_g(y))$ avec $\lim\limits_{y \to y_0} \varepsilon_g(y) = 0$.

En posant $y = f(x)$ et en substituant le développement de f dans celui de g, on obtient :

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + (f(x) - f(x_0))\left[g'(f(x_0)) + \varepsilon_g(f(x))\right]$$

En remplaçant $(f(x) - f(x_0))$ par sa forme développée, il vient :

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + (x - x_0)\underbrace{(f'(x_0) + \varepsilon_f(x))\left[g'(f(x_0)) + \varepsilon_g(f(x))\right]}_{A(x)}$$

Quand $x \to x_0$, on a $f(x) \to f(x_0)$, donc $\varepsilon_g(f(x)) \to 0$ et $\varepsilon_f(x) \to 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to x_0} A(x) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0))$. D'après la **Définition et Proposition 4.1.3**, cela prouve que $g \circ f$ est dérivable et donne la formule de la dérivée. ■

4.2.2 Dérivée de la fonction réciproque

Théorème 4.2.2: Théorème de la bijection et sa dérivée

Soit $f : I \to f(I)$ une bijection continue. Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Démonstration. Posons $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$. Puisque f est une bijection continue, $y \to y_0$ équivaut à $x \to x_0$. Considérons le taux d'accroissement de f^{-1} en y_0 :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Comme f est dérivable en x_0, le dénominateur tend vers $f'(x_0)$ quand $x \to x_0$. Puisque $f'(x_0) \neq 0$, la limite du quotient existe et vaut $\frac{1}{f'(x_0)}$. Ainsi, f^{-1} est dérivable en y_0. ■

Remarque 1:

En utilisant la règle de la composée sur l'identité $f(f^{-1}(y)) = y$, on retrouve la formule :

$$(f^{-1})'(y) \times f'(f^{-1}(y)) = 1 \implies (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Exemple 3:Calcul de la dérivée de $\sqrt{x}$

La fonction $f(x) = x^2$ est continue et strictement croissante sur $I =]0, +\infty[$. Elle réalise une bijection vers $J =]0, +\infty[$. Sa réciproque est $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

On sait que $f'(x) = 2x$. Comme $x > 0$, $f'(x) \neq 0$. Appliquons la formule pour trouver la dérivée de $\sqrt{y}$ en un point y_0 :

$$(\sqrt{y})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{avec } x_0 = \sqrt{y_0}$$

$$(\sqrt{y})'(y_0) = \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}$$

On retrouve bien la formule connue : $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Proposition 4.2.1: Équation de la tangente de f^{-1}

Soit f une bijection dérivable en x_0 telle que $f'(x_0) \neq 0$. L'équation de la tangente à la courbe de la fonction réciproque f^{-1} au point $y_0 = f(x_0)$ s'écrit :

$$x = \frac{1}{f'(x_0)}(y - y_0) + f^{-1}(y_0)$$

Démonstration. On a

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

En applique donc la définition de équation de la tangente et on obtien alors

$$x = \frac{1}{f'(x_0)}(y - y_0) + f^{-1}(y_0)$$

■

4.3 Dérivabilité à gauche et à droite

Lorsque la limite du taux d'accroissement n'est pas la même selon qu'on s'approche de x_0 par valeurs inférieures ou supérieures, on définit les dérivées latérales.

Définition 4.3.1:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

* **Dérivabilité à droite :** f est dérivable à droite en x_0 si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$$

On appelle $f'_d(x_0)$ le **nombre dérivé à droite**.

* **Dérivabilité à gauche :** f est dérivable à gauche en x_0 si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$$

On appelle $f'_g(x_0)$ le **nombre dérivé à gauche**.

Théorème 4.3.1: Condition de dérivabilité

Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si :

i) Elle est dérivable à droite et à gauche en x_0.

ii) Les nombres dérivés sont égaux : $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Si f est dérivable à gauche et à droite mais que $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$, alors la fonction n'est pas dérivable en x_0.

La courbe admet deux demi-tangentes distinctes au point $M_0(x_0, f(x_0))$.

On dit que le point M_0 est un **point anguleux**.

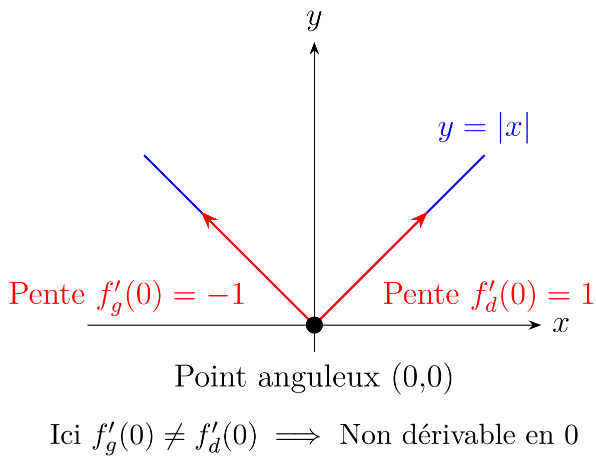

FIGURE 4.2 – Illustration d'un point anguleux avec la fonction valeur absolue. Les pentes à gauche et à droite ne s'alignent pas.

Exemple 4:

La fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0.

— À droite ($x > 0$), $f(x) = x$, donc $f'_d(0) = 1$.

— À gauche ($x < 0$), $f(x) = -x$, donc $f'_g(0) = -1$.

Comme $1 \neq -1$, f n'est pas dérivable en 0.

4.4 Dérivées successives

Définition 4.4.1: Dérivées successives

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On définit les dérivées successives par récurrence. La dérivée d'ordre 0 de f, notée $f^{(0)}$, est la fonction f elle-même. Pour tout entier naturel n, si la dérivée d'ordre n, notée $f^{(n)}$, est définie et dérivable sur I, on appelle dérivée d'ordre $n+1$ la dérivée de $f^{(n)}$. On la note $f^{(n+1)}$.

Une fonction est dite de classe C^n sur I si elle est n fois dérivable et que sa dérivée d'ordre n est continue sur I. Si elle est dérivable à tout ordre, on dit qu'elle est de classe C^∞.

Théorème 4.4.1: Formule de Leibniz

Soient f et g deux fonctions de classe C^n sur un intervalle I. La fonction produit $f \cdot g$ est également de classe C^n sur I, et sa dérivée d'ordre n est donnée par la formule suivante :

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ représente les coefficients binomiaux (combinaisons).

Démonstration. La démonstration s'effectue par récurrence sur l'entier n. Pour $n = 1$, on retrouve la formule classique de la dérivée d'un produit : $(fg)' = f'g + fg'$. En supposant la propriété vraie au rang n, on dérive l'expression de la somme. L'utilisation de la relation de Pascal sur les coefficients binomiaux, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$, permet de regrouper les termes et d'obtenir la formule au rang $n+1$. ■

4.5 Extremum local et Théorème de Rolle

4.5.1 Extremum local

Définition 4.5.1: Extremum local

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et c un point intérieur à I.

i) f admet un **maximum local** en c si : $\exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]c-\delta, c+\delta[, f(x) \leq f(c)$

ii) f admet un **minimum local** en c si : $\exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]c-\delta, c+\delta[, f(x) \geq f(c)$

Théorème 4.5.1: Condition nécessaire d'extremum (Fermat)

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in]a,b[$.

$$\text{Si } x_0 \text{ est un extremum local de } f, \text{ alors } f'(x_0) = 0$$

Démonstration. Soit f dérivable sur un ouvert I et $x_0 \in I$ un point où f admet un maximum local. Alors il existe un voisinage $J \subset I$ de x_0 tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \leq f(x_0)$. Soit τ le Taux d'accroissement définie par :

$$\tau(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

pour h petit .

Le numérateur $f(x_0+h) - f(x_0)$ est toujours **négatif ou nul** par définition du maximum.

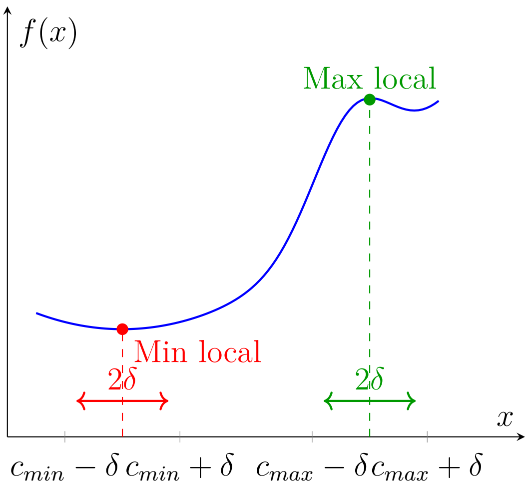

FIGURE 4.3 – Représentation graphique d'un maximum et d'un minimum local avec leurs voisinages d'étude associés.

i) À droite ($h > 0$) : Le quotient est négatif : $\tau(h) \leq 0$. En passant à la limite :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \tau(h) \leq 0$$

ii) À gauche ($h < 0$) : Le dénominateur change de signe, donc le quotient est positif : $\tau(h) \geq 0$. En passant à la limite :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \tau(h) \geq 0$$

La fonction f étant dérivable en x_0, les limites à gauche et à droite sont égales :

$$0 \leq f'(x_0) \leq 0 \implies \mathbf{f'(x_0) = 0}$$

(Le raisonnement est analogue pour un minimum local en inversant le signe du numérateur.)

■

4.5.2 Théorème de Rolle

Théorème 4.5.2: Théorème de Rolle

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois hypothèses suivantes :

i) $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ (continuité sur le fermé)

ii) f est dérivable sur $]a, b[$

iii) $f(a) = f(b)$

Alors : $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$

Démonstration. D'après le théorème des bornes atteintes (Weierstrass), comme $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$, il existe $x_m, x_M \in [a, b]$ tels que :

$$f(x_m) = m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad f(x_M) = M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

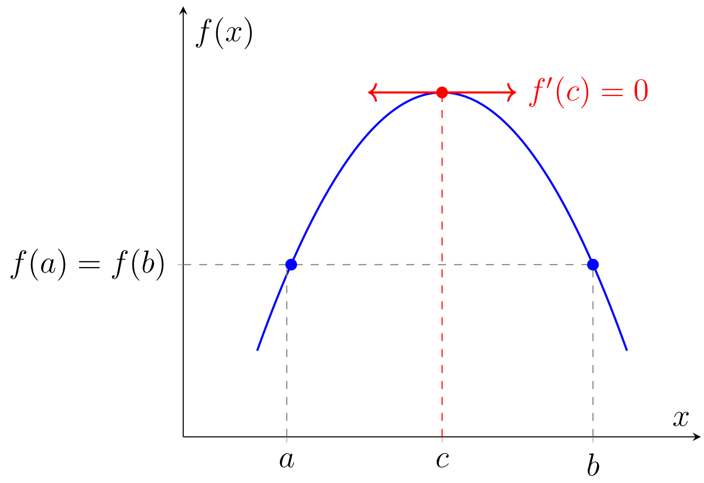

FIGURE 4.4 – Théorème de Rolle : la condition $f(a) = f(b)$ implique l'existence d'un point c tel que $f'(c) = 0$.

i) Si $M = m$. Alors $\forall x \in [a, b], f(x) = f(a)$, donc f est constante.
On a alors

$$\forall c \in]a, b[, f'(c) = 0.$$

ii) Si $M \neq m$. Puisque $f(a) = f(b)$, l'un au moins des deux extremums (M ou m) est atteint en un point c différent des extrémités a et b.
On a donc $c \in]a, b[$. Comme f est dérivable en c et admet un extremum local en ce point, d'après le théorème de Fermat 4.5.1 : $f'(c) = 0$.

■

Exemple 5:Exemple d'application

Soit $f(x) = x^2 - 3x + 2$ sur $I = [1, 2]$.

f est une fonction polynomiale, donc $f \in \mathcal{C}^0([1, 2])$ et dérivable sur $]1, 2[$.

$f(1) = 1^2 - 3(1) + 2 = 0$ et $f(2) = 2^2 - 3(2) + 2 = 0$, donc $f(1) = f(2)$.

Par le théorème de Rolle : $\exists c \in]1, 2[, f'(c) = 0$.
On résout $f'(x) = 2x - 3 = 0$, ce qui donne $c = \frac{3}{2}$. On vérifie bien que $\frac{3}{2} \in]1, 2[$.

4.6 Théorème des accroissements finis et applications

4.6.1 Théorème des Accroissements Finis (TAF)

Théorème 4.6.1: Théorème des Accroissements Finis (TAF)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant les conditions suivantes :

i) f est **continue** sur l'intervalle fermé $[a, b]$,

ii) f est **dérivable** sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Alors, il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

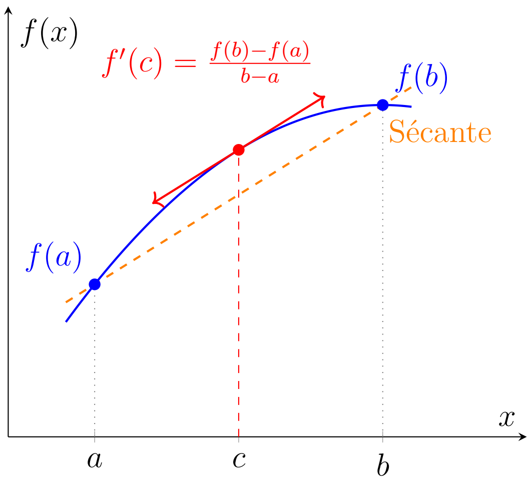

FIGURE 4.5 – Illustration du Théorème des Accroissements Finis : existence d'un point c où la tangente est parallèle à la sécante.

C'est-a-dire il existe au moins un point de la courbe d'abscisse c où la **tangente est parallèle à la sécante** reliant les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

Démonstration. On définit la fonction g sur $[a, b]$ par :

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right]$$

Cette fonction g représente l'écart vertical entre la courbe de f et la corde (AB).

g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ car f l'est.

et :

i) $g(a) = f(a) - [f(a) + 0] = 0$.
ii) $g(b) = f(b) - [f(a) + (f(b) - f(a))] = f(b) - f(b) = 0$.

On a donc $g(a) = g(b) = 0$.
D'après le théorème de Rolle 4.5.2, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. En dérivant g, on obtient :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ainsi, $g'(c) = 0$ implique directement :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

4.6.2 Sens de variation et dérivée

Corollaire 4.6.1: Sens de variation et dérivée

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Les propriétés suivantes caractérisent le lien entre le signe de la dérivée et les variations de f :

i) $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) \geq 0 \iff f$ est croissante sur $[a, b]$.
ii) $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) \leq 0 \iff f$ est décroissante sur $[a, b]$.
iii) $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) = 0 \iff f$ est constante sur $[a, b]$.

De plus, concernant la croissance stricte :

iv) $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) > 0 \implies f$ est strictement croissante sur $[a,b]$.

v) $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) < 0 \implies f$ est strictement décroissante sur $[a,b]$.

Démonstration. (Cas de la croissance)
L'implication ($\Leftarrow$) découle de la définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement (qui est positif si f est croissante).

L'implication ($\Rightarrow$) est une conséquence directe du **Théorème des Accroissements Finis**.

Soit $(x_1, x_2) \in [a,b]^2$ tel que $x_1 < x_2$. D'après le TAF 4.6.1 appliqué à f sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que :

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

* Si $f'(c) \geq 0$, alors comme $x_2 - x_1 > 0$, on a $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, soit $f(x_1) \leq f(x_2)$.
* Si $f'(c) > 0$, alors $f(x_2) - f(x_1) > 0$, soit $f(x_1) < f(x_2)$, ce qui prouve la croissance stricte.

Le raisonnement est identique pour les autres cas. ■

4.6.3 Inégalité des Accroissements Finis (IAF)

Corollaire 4.6.2: Inégalité des Accroissements Finis (IAF)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. S'il existe un réel $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leq M$, alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

Démonstration. L'inégalité est immédiate si $a = b$. Supposons $a < b$. D'après le Théorème des Accroissements Finis 4.6.1, il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

En passant à la valeur absolue :

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)| \cdot |b - a|$$

Or, par hypothèse, nous savons que $|f'(x)| \leq M$ pour tout x de l'intervalle, donc en particulier pour c :

$$|f'(c)| \leq M$$

On en déduit l'inégalité souhaitée :

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

■

4.7 Applications avancées et Convexité

4.7.1 Règle de L'Hôpital

Théorème 4.7.1: Règle de L'Hôpital

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I ouvert contenant c (ou ayant c pour extrémité), telles que $g'(x) \neq 0$ pour $x \neq c$. Si :

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to c} |f(x)| = \lim_{x\to c} |g(x)| = +\infty$$

Et si la limite $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors :

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exemple 6:

Calculons $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$. On a $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$. Les deux tendent vers 0. $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos(x)}{1}$. Comme $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$, alors $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Remarque 2:

Cette règle ne s'applique que pour les formes indéterminées $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Il faut toujours vérifier les hypothèses avant de dériver.

4.7.2 Convexité et dérivée seconde

Définition 4.7.1: Fonctions convexes et concaves

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **convexe** sur I si pour tous $x, y \in I$ et tout $\lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Géométriquement, cela signifie que la courbe est située en dessous de ses cordes.

Proposition 4.7.1:

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.

1. f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
2. f est concave sur I si et seulement si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.

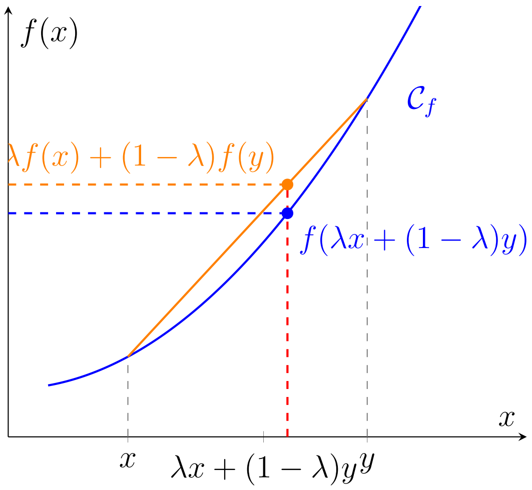

FIGURE 4.6 – Caractérisation d'une fonction convexe par ses cordes.

Définition 4.7.2: Point d'inflexion

On appelle **point d'inflexion** un point où la courbe d'une fonction change de concavité (elle passe de convexe à concave, ou inversement).

Théorème 4.7.2:

Si f est deux fois dérivable en c, et si $f''(c) = 0$ en changeant de signe en c, alors le point $(c, f(c))$ est un point d'inflexion.

Exemple 7:

Soit $f(x) = x^3$. $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$. $f''(x)$ s'annule en 0 et change de signe (négatif pour $x < 0$, positif pour $x > 0$). Le point $(0, 0)$ est donc un point d'inflexion pour la fonction cube.

Corollaire 4.7.1:

En un point d'inflexion, la courbe traverse sa tangente.

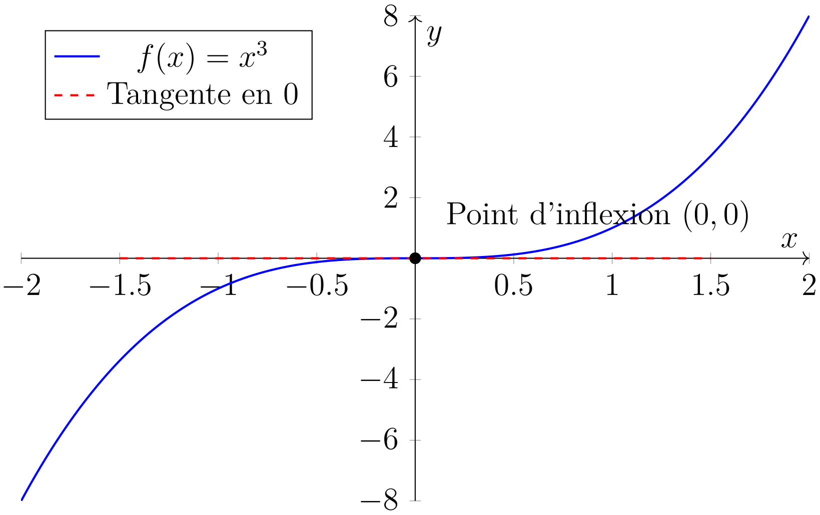

Figure 4.7 – Illustration du point d'inflexion de la fonction $f(x) = x^3$ et de sa tangente à l'origine.