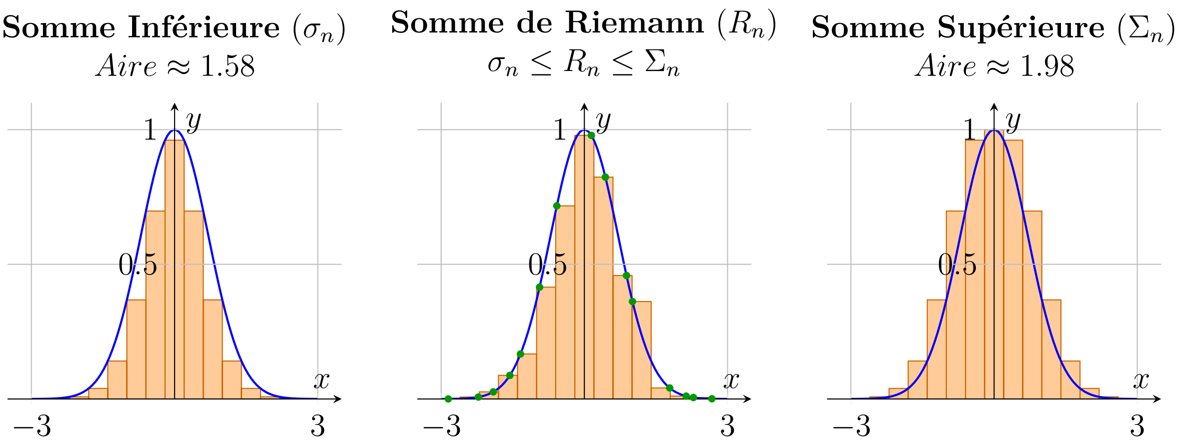
UNIVERSITÉ MOHAMED V
FACULTÉ DES SCIENCES RABAT
Département de Mathématiques

Filière :
Sciences Mathématiques (SM)
Analyse II

Intégrale de Riemann

Par
Prof : Mohamed Najib LAATABI



Toute remarque de votre part est la bienvenue.
Si vous identifiez une erreur, veuillez la signaler.

Année Universitaire : **2025-2026**

Table des matières

Symboles et abréviations

Symbole/Abbréviation	Description
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Q}$	Ensemble des rationnels
$\lfloor x \rfloor$	Valeur absolue
$\sup(E)$	Bornes supérieure de E
$\inf(E)$	Bornes inférieure de E
$\mathcal{S}$	L'ensemble de toutes les subdivisions possibles de $[a, b]$
$\delta(S)$	**Pas** de la subdivision S
$\mathbf{1}_A(x)$	**Fonction indicatrice** de A
$\sigma(\varphi, S)$	**Somme de Darboux inférieure**
$\Sigma(\varphi, S)$	**Somme de Darboux supérieure**
$R(\varphi, S, \xi)$	**Somme de Riemann**

Introduction

Pourquoi réapprendre l'intégration ?
Au lycée, l'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est souvent perçue comme un simple outil de calcul, l'opération inverse de la dérivée. Mais cette vision mécanique cache la véritable nature du problème : **comment mesurer l'aire d'une forme complexe ?**

Ce cours reprend tout à zéro avec une approche visuelle et géométrique. Nous allons suivre l'idée géniale de Riemann et Darboux : *pour comprendre le complexe, il faut l'encadrer par du simple.* Concrètement, nous allons "coincer" nos courbes entre des empilements de rectangles (fonctions en escalier).

Cette construction rigoureuse est le socle de l'Analyse Réelle. Elle nous permettra de valider vos méthodes de calcul actuelles, mais aussi de toucher du doigt leurs limites, notamment lorsqu'il s'agira de manipuler des sommes infinies ou des limites d'intégrales, préparant ainsi le terrain pour les mathématiques avancées de la Licence 3.

Chapitre 1 Intégrales des fonctions en escalier

1.1 Fonctions en escalier

Définition 1.1.1:Subdivision et Pas

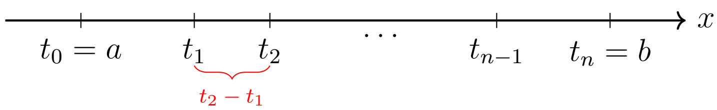
Soit $[a, b]$ un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$).

1. On appelle **subdivision** de $[a, b]$ toute suite finie strictement croissante $S = (t_i)_{0 \leq i \leq n}$ de points de $[a, b]$ telle que :

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

2. On appelle **pas** de la subdivision S, noté $\delta(S)$ (ou parfois $\|S\|$), la plus grande distance entre deux points consécutifs de la subdivision :

$$\delta(S) = \max_{0 \leq i \leq n-1} (t_{i+1} - t_i)$$



Remarque 1:

Bien que la théorie soit construite sur un intervalle général $[a, b]$, il est très fréquent dans les exemples pratiques et les exercices de choisir l'intervalle **unitaire** $[0, 1]$. Ce choix permet de simplifier considérablement les écritures et les calculs sans perdre la généralité des propriétés démontrées.

Exemple 1:Subdivision quelconque sur [0,1]

Considérons l'intervalle $[0, 1]$. La suite finie $S_1 = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$ est une subdivision de pas $\delta(S_1) = \frac{1}{3}$. Les points ne sont pas obligés d'être équidistants, par exemple $S_2 = (0, 0.1, 0.9, 1)$ est aussi une subdivision valide.

Exemple 2:Subdivision régulière

C'est l'exemple le plus important pour les calculs. Pour un intervalle $[a, b]$ et un entier $n \geq 1$, la **subdivision régulière** (ou équidistante) de pas $\frac{b-a}{n}$ est définie par les points :

$$t_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}, \quad \text{pour } k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Par exemple, si $n = 4$ sur $[0, 1]$, on obtient $S = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)$.

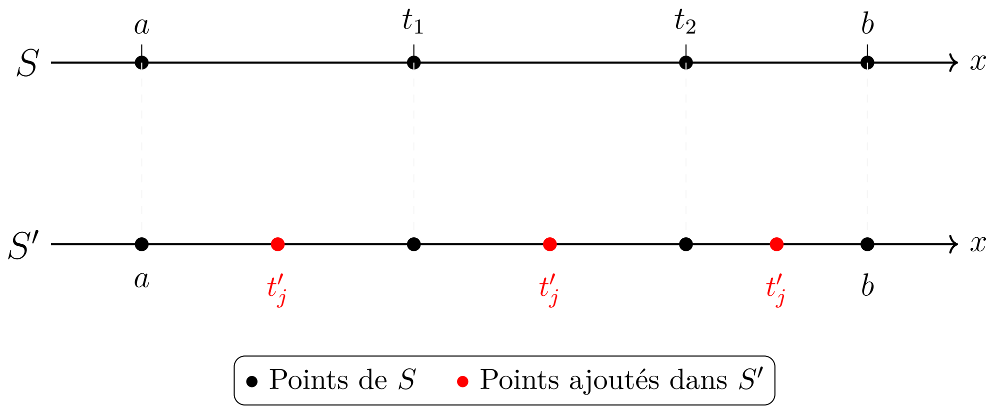
Définition 1.1.2:Subdivision plus fine

Soient S et S' deux subdivisions d'un même intervalle $[a, b]$. On dit que la subdivision S' est **plus fine** que la subdivision S si tous les points de S sont aussi des points de S'. Autrement dit :

$$S \subset S'$$

Cela signifie que S' est obtenue en ajoutant de nouveaux points à S.

Illustration du raffinement $(S \subset S')$



Remarque 2:Point méthode fondamental

Soient S_1 et S_2 deux subdivisions quelconques d'un même intervalle $[a, b]$. Si l'on considère la subdivision S_3 constituée de la réunion (l'union) de tous les points de S_1 et de S_2 :

$$S_3 = S_1 \cup S_2$$

Alors, par construction, $S_1 \subset S_3$ et $S_2 \subset S_3$.

Conséquence : La subdivision S_3 est **plus fine à la fois** que S_1 et que S_2.

Note : Gardez cette propriété en mémoire. Elle sera systématiquement utilisée dans les démonstrations à venir, notamment pour comparer les sommes de Darboux calculées sur des découpages différents.

Pour construire l'intégrale, nous allons utiliser des fonctions simples : les fonctions constantes par morceaux. Pour les définir proprement, introduisons d'abord un outil de notation très pratique.

Définition 1.1.3:Fonction indicatrice

Soit E un ensemble (dans notre cas, ce sera souvent un intervalle de $\mathbb{R}$) et A une partie de E. On appelle **fonction indicatrice** de A, notée $\mathbf{1}_A$ (ou parfois χ_A), la fonction définie sur E par :

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Intuition : Cette fonction "indique" la présence de x dans l'ensemble A (elle vaut 1) ou son absence (elle vaut 0).

Une fonction en escalier est une fonction qui reste constante sur les intervalles ouverts d'une subdivision.

Définition 1.1.4:Fonction en escalier

Soit $[a, b]$ un segment et $S = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ une subdivision de $[a, b]$. Une fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite **en escalier subordonnée à la subdivision** S (ou adaptée à S) si elle est constante sur chaque intervalle ouvert $]t_i, t_{i+1}[$.

Autrement dit, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, il existe une constante $c_i \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in]t_i, t_{i+1}[, \quad \varphi(x) = c_i$$

Écriture algébrique : En utilisant les fonctions indicatrices, on peut écrire φ (sauf éventuellement aux points de la subdivision) sous la forme :

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}[}(x)$$

Exemple 3:C

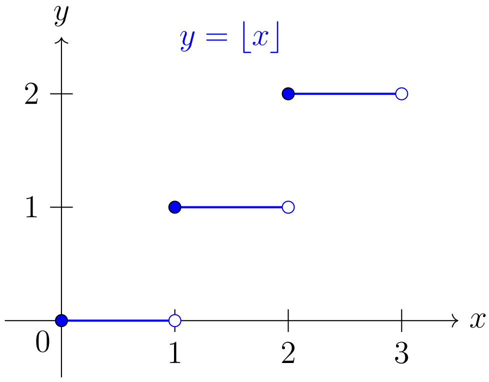
onsidérons la fonction partie entière, notée $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$, sur l'intervalle $[0, 3]$. La fonction est définie par $E(x) = k$ pour tout $x \in [k, k+1[$.

C'est une fonction en escalier subordonnée à la subdivision $S = (0, 1, 2, 3)$. En effet :

- Sur $]0, 1[$, la fonction est constante et vaut 0.
- Sur $]1, 2[$, la fonction est constante et vaut 1.
- Sur $]2, 3[$, la fonction est constante et vaut 2.

On peut l'écrire comme combinaison linéaire d'indicatrices (aux points de discontinuité près) :

$$f(x) = 0 \cdot \mathbf{1}_{]0,1[}(x) + 1 \cdot \mathbf{1}_{]1,2[}(x) + 2 \cdot \mathbf{1}_{]2,3[}(x)$$



L'ensemble des fonctions en escalier possède une structure algébrique stable, ce qui est fondamental pour la linéarité de l'intégrale que nous définirons plus tard.

Proposition 1.1.1:

On note $\mathcal{E}([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$. $\mathcal{E}([a,b])$ est un **sous-espace vectoriel** de l'espace vectoriel des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Autrement dit :

1. La fonction nulle est une fonction en escalier.
2. Si φ et ψ sont deux fonctions en escalier et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors la combinaison linéaire $\lambda\varphi + \mu\psi$ est encore une fonction en escalier.

Démonstration. **Élément neutre.** La fonction nulle est constante sur $]a,b[$. Elle est donc en escalier, car elle est adaptée à la subdivision triviale $S = \{a, b\}$.

Stabilité par combinaison linéaire. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b])$ deux fonctions en escalier et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ deux scalaires. Par définition, il existe une subdivision S_1 adaptée à φ et une subdivision S_2 adaptée à ψ.

Le problème est que S_1 et S_2 ne sont pas forcément identiques. Pour pouvoir sommer les fonctions, nous devons nous placer sur une subdivision commune. Considérons alors la subdivision réunion :

$$S_3 = S_1 \cup S_2$$

D'après la remarque précédente, cette subdivision S_3 est plus fine à la fois que S_1 et que S_2. Par conséquent, la fonction φ est constante sur chaque intervalle ouvert de S_3 (puisque S_3 raffine S_1) et, de la même manière, la fonction ψ est également constante sur chaque intervalle ouvert de S_3 (puisque S_3 raffine S_2).

Soit maintenant $]t_k, t_{k+1}[$ un intervalle ouvert quelconque de la subdivision S_3. Sur cet intervalle, on a :

$$\varphi(x) = c_k \quad \text{et} \quad \psi(x) = d_k$$

La combinaison linéaire vaut alors :

$$(\lambda\varphi + \mu\psi)(x) = \lambda c_k + \mu d_k = \text{Constante}_k$$

La fonction $\lambda\varphi + \mu\psi$ est donc constante sur tous les intervalles ouverts de la subdivision S_3. Elle est bien une fonction en escalier. □ ■

1.2 Intégrale des fonctions en escalier

Nous pouvons maintenant définir l'intégrale pour ces fonctions simples. L'idée est naturelle : l'intégrale est la somme des aires des rectangles formés par l'escalier.

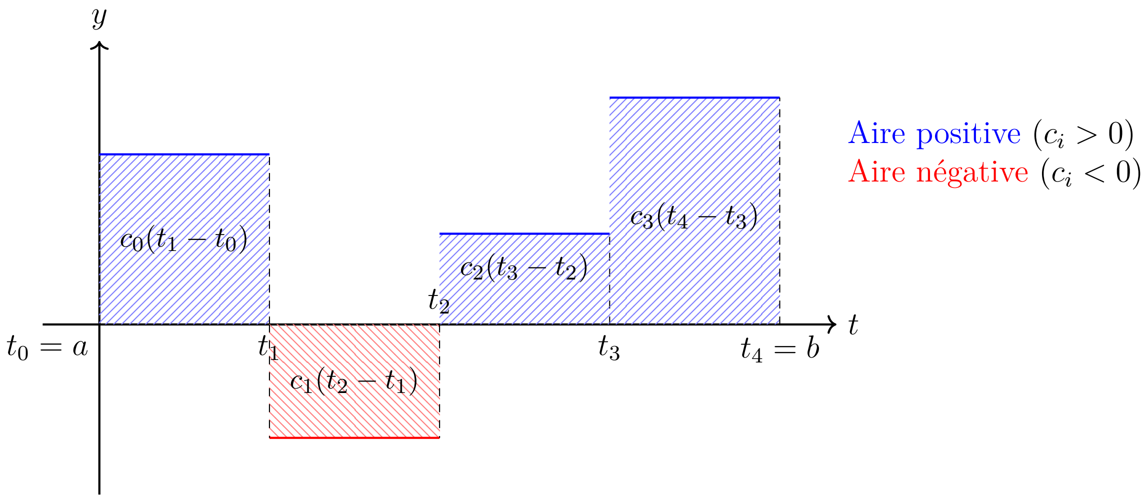
Définition 1.2.1:

Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$. Soit $S = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ une subdivision adaptée à φ. Pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, on note c_i la valeur constante prise par φ sur l'intervalle ouvert $]t_i, t_{i+1}[$.

On appelle **intégrale de Riemann** de la fonction en escalier φ sur $[a, b]$ le nombre réel noté $I(\varphi)$ ou $\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$, défini par :

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(t_{i+1} - t_i)$$

Cette définition appelle une précision importante. Une fonction en escalier peut être associée à une infinité de subdivisions différentes (en rajoutant des points inutilement). On démontre (c'est un résultat d'indépendance) que la valeur de la somme ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée S. L'intégrale est donc bien définie de manière unique pour la fonction φ.



Remarque 3:

L'intégrale correspond à l'**aire algébrique** comprise entre la courbe de φ et l'axe des abscisses. Les rectangles situés sous l'axe (où $c_i < 0$) comptent négativement dans la somme totale.

1.3 Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

L'application qui à une fonction en escalier associe son intégrale possède des propriétés algébriques et d'ordre remarquables. Ce sont ces mêmes propriétés que l'on cherchera à étendre plus tard à toutes les fonctions intégrables.

Proposition 1.3.1: Linéarité

Soient φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et soient λ, μ deux réels. Alors :

$$\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Comme nous l'avons vu pour la structure d'espace vectoriel, le point clé est de travailler sur une subdivision commune. Soient S_1 une subdivision adaptée à φ et S_2 adaptée à ψ. Considérons $S = S_1 \cup S_2 = (t_i)_{0\leq i\leq n}$, qui est plus fine que les deux précédentes.

Sur chaque intervalle ouvert $]t_i, t_{i+1}[$, φ prend une valeur constante c_i et ψ prend une valeur constante d_i. La fonction combinaison linéaire $\lambda\varphi + \mu\psi$ prend donc la valeur constante $\lambda c_i + \mu d_i$.

Par définition de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi) &= \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda c_i + \mu d_i)(t_{i+1} - t_i) \\ &= \lambda \sum_{i=0}^{n-1} c_i(t_{i+1} - t_i) + \mu \sum_{i=0}^{n-1} d_i(t_{i+1} - t_i) \\ &= \lambda \int_a^b \varphi + \mu \int_a^b \psi\end{aligned}$$

■

L'intégrale respecte l'ordre naturel des fonctions : une fonction "plus grande" a une intégrale "plus grande".

Proposition 1.3.2: Positivité et Croissance

1. **Positivité :** Si φ est une fonction en escalier positive sur $[a, b]$ (c'est-à-dire $\forall x, \varphi(x) \geq 0$), alors :
$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$
2. **Croissance :** Si φ et ψ sont deux fonctions en escalier telles que $\varphi \leq \psi$ sur $[a, b]$, alors :
$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t$$

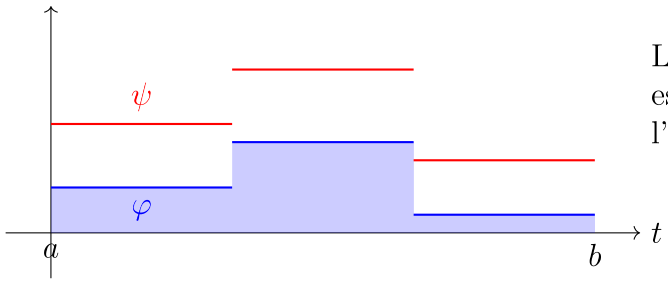
Démonstration. Pour la positivité, considérons une subdivision adaptée à φ. Sur chaque intervalle, φ vaut $c_i \geq 0$. Comme les longueurs $(t_{i+1} - t_i)$ sont toujours positives, la somme $\sum c_i(t_{i+1} - t_i)$ est une somme de termes positifs, donc positive.

Pour la croissance, on applique la propriété de positivité à la fonction différence $\psi - \varphi$. Comme $\psi \geq \varphi$, on a $\psi - \varphi \geq 0$. Par linéarité :

$$\int (\psi - \varphi) = \int \psi - \int \varphi \geq 0 \implies \int \psi \geq \int \varphi$$

■

Illustration de la croissance ($\varphi \leq \psi$)



L'aire sous φ (bleu) est incluse dans l'aire sous ψ (rouge).

Cette propriété concerne le découpage de l'intervalle d'intégration.

Proposition 1.3.3: Relation de Chasles

Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$ et soit $c \in]a,b[$. Alors :

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Soit S une subdivision adaptée à φ. Si le point c n'est pas dans S, on l'ajoute pour obtenir une subdivision $S' = S \cup \{c\}$. S' est plus fine, donc on peut l'utiliser pour calculer l'intégrale.

La somme totale des rectangles sur $[a,b]$ se scinde alors naturellement en deux paquets : ceux situés avant c (qui donnent $\int_a^c \varphi$) et ceux situés après c (qui donnent $\int_c^b \varphi$). ■

Pour majorer une intégrale, nous avons besoin de manipuler la valeur absolue de la fonction.

Proposition 1.3.4: Valeur absolue et Majoration

Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$.

1. La fonction $|\varphi|$, définie par $x \mapsto |\varphi(x)|$, est aussi une fonction en escalier sur $[a,b]$.
2. On a l'inégalité triangulaire pour les intégrales :

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$$

3. En notant $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |\varphi(x)|$ la borne supérieure de $|\varphi|$, on a la majoration fondamentale :

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq (b-a) \cdot \sup_{x\in[a,b]} |\varphi(x)|$$

Démonstration. **1.** Soit $S = (t_i)$ une subdivision adaptée à φ. Sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$, φ est constante égale à c_i. Donc $|\varphi|$ est constante égale à $|c_i|$. Elle est donc bien en escalier sur la même subdivision.

2 et 3. Revenons à la définition de l'intégrale sous forme de somme.

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(t_{i+1} - t_i)$$

Prenons la valeur absolue de cette quantité. En utilisant l'inégalité triangulaire classique pour les sommes finies ($|\sum x_k| \leq \sum |x_k|$), et sachant que les longueurs $(t_{i+1} - t_i)$ sont positives :

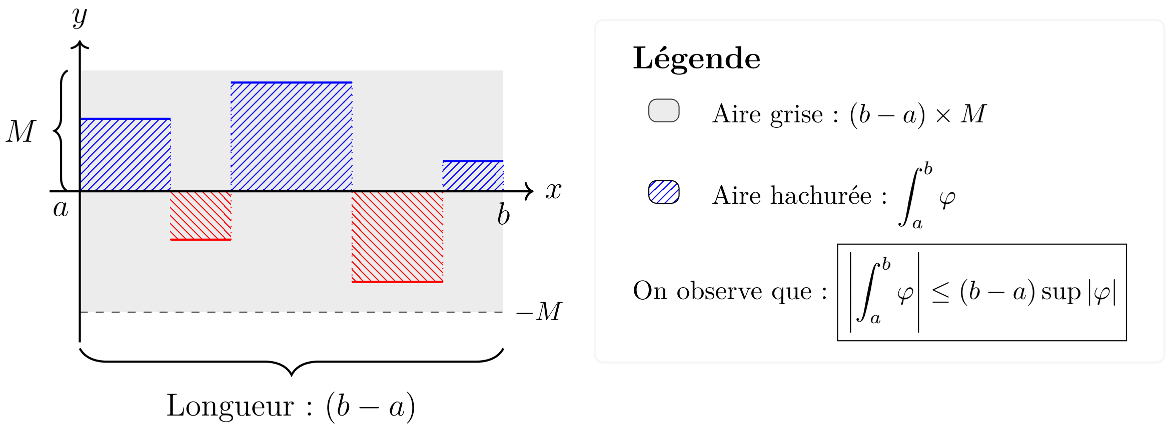
$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} c_i(t_{i+1} - t_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |c_i|(t_{i+1} - t_i) \quad \left(= \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t\right) \end{aligned}$$

Cela démontre le point 2. Pour le point 3, remarquons que pour tout indice i, la valeur $|c_i|$ est inférieure ou égale au maximum global de la fonction sur le segment, soit $M = \sup_{[a,b]} |\varphi|$.

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} |c_i|(t_{i+1} - t_i) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} M(t_{i+1} - t_i) \\ &= M \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \\ &= M(b - a) \end{aligned}$$

(Car la somme des longueurs des sous-intervalles vaut la longueur totale $b - a$.). ■



1.4 Sommes de Darboux et de Riemann

Pour définir l'intégrale d'une fonction bornée quelconque φ, nous allons l'encadrer par des fonctions en escalier. Cela nous amène à définir deux quantités : l'une approchant l'aire par défaut (Darboux inférieur), l'autre par excès (Darboux supérieur).

1.4.1 Sommes de Darboux

Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction **bornée** (pas nécessairement continue pour l'instant). Soit $S = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$.

Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, la fonction φ étant bornée, elle admet une borne inférieure et une borne supérieure finies. On note :

$$m_i = \inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} \varphi(t) \quad \text{et} \quad M_i = \sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} \varphi(t)$$

Définition 1.4.1:Sommes de Darboux

On appelle :

Somme de Darboux inférieure $\sigma(\varphi, S)$ la somme des aires des rectangles basés sur les infimums :

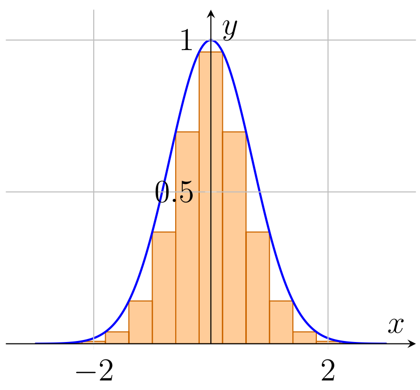
$$\sigma(\varphi, S) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

Somme de Darboux supérieure $\Sigma(\varphi, S)$ la somme des aires des rectangles basés sur les supremums :

$$\Sigma(\varphi, S) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

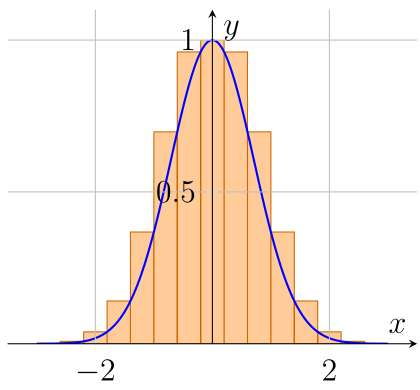
Intuitivement, $\sigma(\varphi, S)$ est l'intégrale de la "plus grande fonction en escalier" située sous φ, et $\Sigma(\varphi, S)$ est l'intégrale de la "plus petite fonction en escalier" située au-dessus de φ.

Somme Inférieure (s_n)



a : Somme de Darboux inférieure pour la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ sur l'intervalle $[-3, 3]$ avec $n = 15$.

Somme Supérieure (S_n)



b : Somme de Darboux supérieure pour la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ sur l'intervalle $[-3, 3]$ avec $n = 15$.

1.4.2 Sommes de Riemann

Bernhard Riemann a proposé une approche légèrement différente. Au lieu de chercher le min ou le max exact sur l'intervalle (qui peuvent être difficiles à calculer), on choisit un point au hasard dans chaque intervalle.

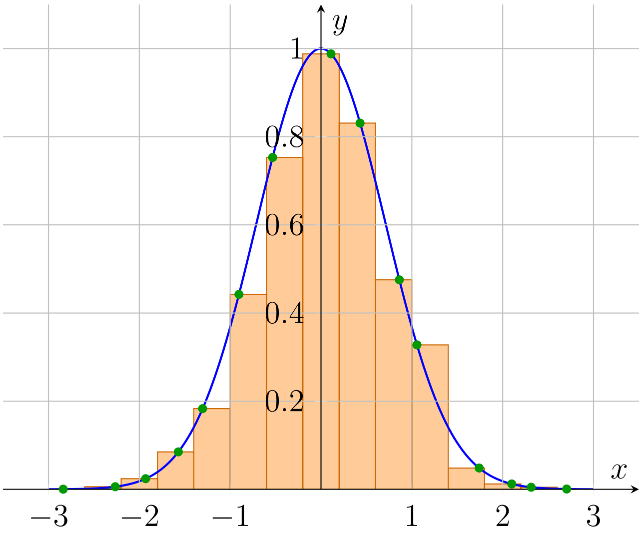
Définition 1.4.2:Somme de Riemann

On appelle **subdivision pointée** la donnée d'une subdivision $S = (x_i)$ et d'une famille de points $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ tels que pour tout i, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

La **somme de Riemann** associée à ce choix est :

$$R(\varphi, S, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Somme de Riemann (points aléatoires c_i)



Somme de Riemann de $f(x) = e^{-x^2}$ sur $[-3, 3]$ avec $n = 15$ et des points d'évaluation c_i choisis aléatoirement.

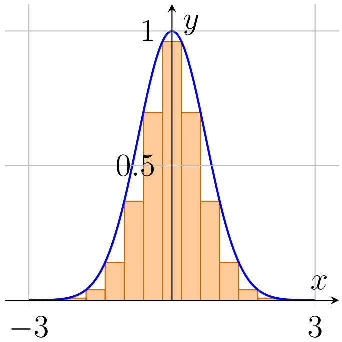
Remarque 4:Lien fondamental

Pour tout choix de points ξ_i, on a l'encadrement fondamental :

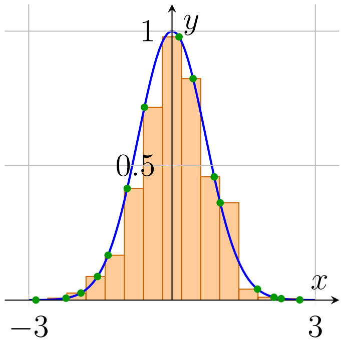
$$\sigma(\varphi, S) \leq R(\varphi, S, \xi) \leq \Sigma(\varphi, S)$$

L'intégrale sera définie lorsque l'écart entre la somme inférieure et la somme supérieure deviendra arbitrairement petit.

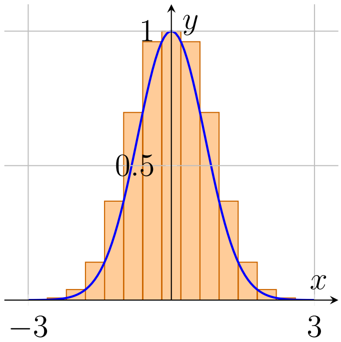
Somme Inférieure (σ_n)
Aire ≈ 1.58



Somme de Riemann (R_n)
$\sigma_n \leq R_n \leq \Sigma_n$



Somme Supérieure (Σ_n)
Aire ≈ 1.98



Comparaison des Sommes

La somme de Riemann R_n (milieu) est toujours encadrée par la somme inférieure σ_n (gauche) et la somme supérieure Σ_n (droite).

Exemple 4:

Considérons $\varphi(x) = x^2$ sur $[0, 1]$ avec la subdivision régulière $x_i = \frac{i}{n}$. La fonction est croissante, donc sur chaque intervalle $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$:

Le minimum est atteint à gauche : $m_i = \varphi(x_i) = (\frac{i}{n})^2$.

Le maximum est atteint à droite : $M_i = \varphi(x_{i+1}) = (\frac{i+1}{n})^2$.

La somme de Darboux inférieure vaut :

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

La somme de Darboux supérieure vaut :

$$\Sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Un calcul de limite (utilisant la formule de la somme des carrés) montrerait que les deux convergent vers $\frac{1}{3}$.

Définition 1.4.3:(Somme de Riemann Uniforme)

Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Soit $S = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ une subdivision uniforme de $[a, b]$ telle que $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

La somme de Riemann de φ associée à S et aux points marqués $c_k \in [x_k, x_{k+1}]$ est donnée par :

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(c_k)\delta(S) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(c_k)$$

où $\delta(S) = \frac{b-a}{n}$ représente la largeur de chaque sous-intervalle.

Proposition 1.4.1:

Soit φ une fonction bornée sur un intervalle $[a, b]$.

1. **Encadrement de la somme de Riemann :**
   Pour toute subdivision S de $[a, b]$ et pour tout choix de points intermédiaires c (points marqués), la somme de Riemann est encadrée par les sommes de Darboux inférieure et supérieure :

$$\sigma(\varphi, S) \leq R(\varphi, S, c) \leq \Sigma(\varphi, S)$$

2. **Propriété de raffinement :**
   Soient S et S' deux subdivisions de $[a, b]$. Si S' est plus fine que S (c'est-à-dire $S \subset S'$), alors la somme inférieure augmente et la somme supérieure diminue :

$$\sigma(\varphi, S) \leq \sigma(\varphi, S') \quad \text{et} \quad \Sigma(\varphi, S') \leq \Sigma(\varphi, S)$$