UNIVERSITÉ MOHAMED V
FACULTÉ DES SCIENCES RABAT
Département de Mathématiques

Filière :

Sciences Mathématiques (SM)

Analyse I

Analyse Réelle

Par
Prof : Mohamed Najib LAATABI
Email :laatabinajib43@gmail.com

Toute remarque de votre part est la bienvenue.
Si vous identifiez une erreur, veuillez la signaler.

Année Universitaire : **2025-2026**

Table des matières

Symboles et abréviations

Symbole	Description / Signification	Chapitre
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	Ensembles des entiers (nat., rel.), rationnels et réels	1
$\lvert x\rvert$	Valeur absolue de x	1
$\sup(E), \inf(E)$	Borne supérieure et borne inférieure de l'ensemble E	1
$E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$	Partie entière du réel x	1
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Suite numérique	2
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	Limite d'une suite	2
$\forall, \exists, \implies$	Pour tout, il existe, implique (Logique)	2
ϵ (epsilon)	Un réel strictement positif aussi petit que l'on veut	2
$f : I \to \mathbb{R}$	Fonction réelle définie sur un intervalle I	3
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	Limite de la fonction f quand x tend vers x_0	3
$f \circ g$	Composition des fonctions f et g	3
f^{-1}	Fonction réciproque de f	3
$f'(x)$	Dérivée première de f au point x	4
$f'_g(x), f'_d(x)$	Dérivée à gauche et dérivée à droite	4
$f^{(n)}(x)$	Dérivée d'ordre n (dérivées successives)	4
TAF / IAF	Théorème / Inégalité des Accroissements Finis	4
f''	Dérivée seconde (utilisée pour la convexité)	4

Chapitre 3

Limites et fonctions continues

3.1 Notions de fonction

3.1.1 Définitions

Définition 3.1.1:

Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, où $\mathcal{U}$ est une partie de $\mathbb{R}$. En général, $\mathcal{U}$ est un intervalle ou une réunion d'intervalles. On appelle $\mathcal{U}$ le domaine de définition de la fonction f .

3.1.2 Opérations sur les fonctions

Soient $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :

- ♢ La somme de f et g est définie par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

- ♢ Le produit de f et g est défini par

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x), \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

- ♢ Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x), \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

3.1.3 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 3.1.2:

Soient $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors :

- . $f \geq g$ si $\forall x \in \mathcal{U},\ f(x) \geq g(x)$;
- . $f \geq 0$ si $\forall x \in \mathcal{U},\ f(x) \geq 0$;
- . $f > 0$ si $\forall x \in \mathcal{U},\ f(x) > 0$;
- . f est dite **constante** sur $\mathcal{U}$ si $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{U},\ f(x) = a$;

. f est dite **nulle** sur $\mathcal{U}$ si $\forall x \in \mathcal{U},\ f(x) = 0$.

Définition 3.1.3:
Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

. f est **majorée** sur $\mathcal{U}$ si $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{U},\ f(x) \leq M$;

. f est **minorée** sur $\mathcal{U}$ si $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{U},\ f(x) \geq m$;

. f est **bornée** sur $\mathcal{U}$ si elle est à la fois majorée et minorée sur $\mathcal{U}$, c'est-à-dire

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{U},\ |f(x)| \leq M.$$

3.1.4 Fonctions croissantes, décroissantes

Définition 3.1.4:
Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

. f est **croissante** sur $\mathcal{U}$ si

$$\forall x, y \in \mathcal{U},\ x \leq y \implies f(x) \leq f(y);$$

. f est **strictement croissante** sur $\mathcal{U}$ si

$$\forall x, y \in \mathcal{U},\ x < y \implies f(x) < f(y);$$

. f est **décroissante** sur $\mathcal{U}$ si

$$\forall x, y \in \mathcal{U},\ x \leq y \implies f(x) \geq f(y);$$

. f est **strictement décroissante** sur $\mathcal{U}$ si

$$\forall x, y \in \mathcal{U},\ x < y \implies f(x) > f(y);$$

. f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur $\mathcal{U}$ si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur $\mathcal{U}$.

3.2 Limites

3.2.1 Cas d'une limite finie

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Définition 3.2.1: Limite en un point
Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

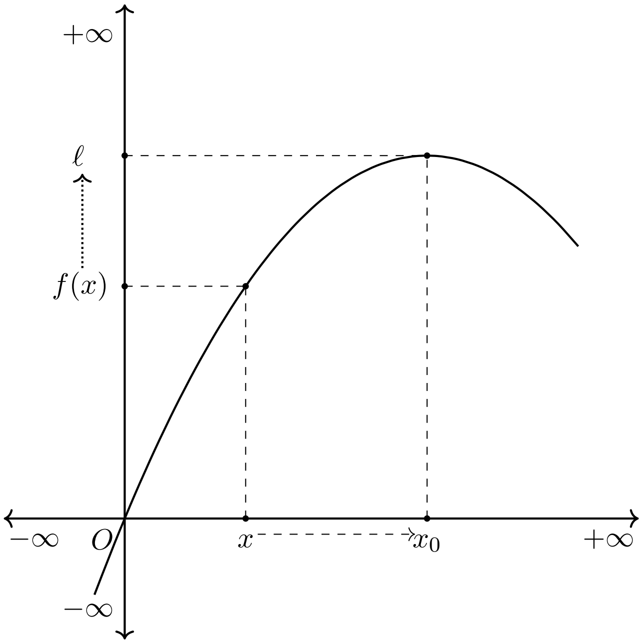

FIGURE 3.1 – Illustration de la limite à droite en x_0 égale à ℓ.

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0. On note alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Remarque 1:

L'inégalité $|x - x_0| < \delta$ équivaut à $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. De même, l'inégalité $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ équivaut à $f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

3.2.2 Cas où la limite est $+\infty$ ou $-\infty$

Définition 3.2.2: Limite $+\infty$ en x_0

On dit que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 est $+\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

On note : $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Définition 3.2.3: Limite $-\infty$ en x_0

On dit que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 est $-\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A$$

On note : $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Remarque 2:

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ (c'est-à-dire $+\infty$ ou $-\infty$), on dit que la courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$, admet la **droite d'équation** $x = x_0$ comme **asymptote verticale**.

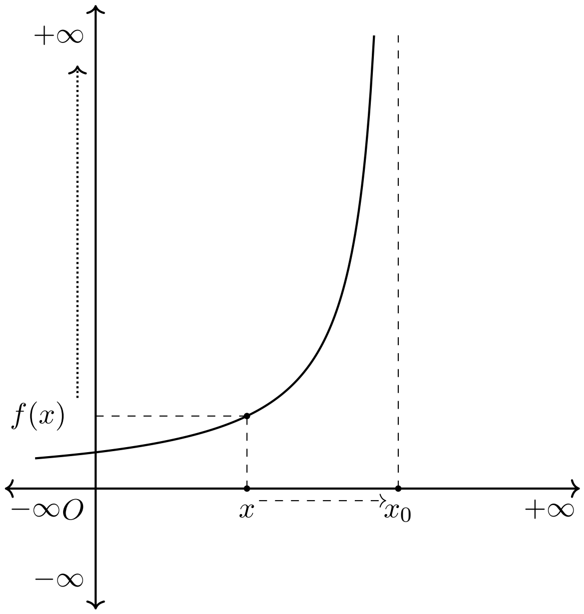

FIGURE 3.2 – Illustration de la limite à gauche en x_0 égale à $+\infty$.

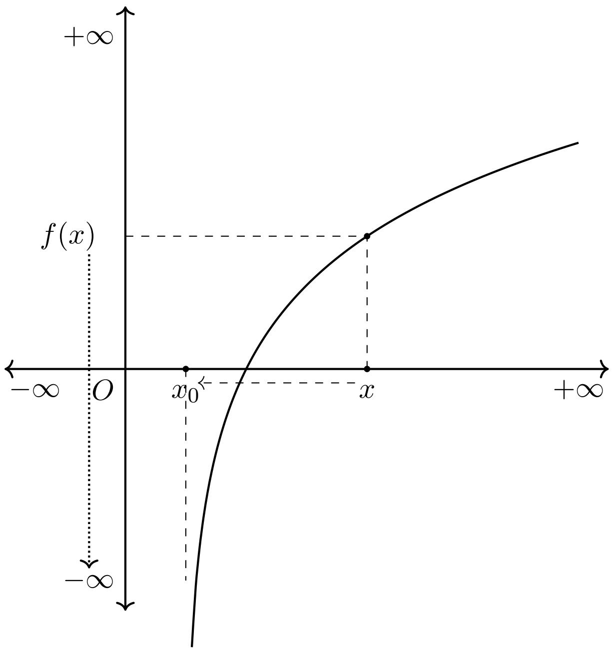

FIGURE 3.3 – Illustration de la limite à droite en x_0 égale à $-\infty$.

FIGURE 3.4 – Illustration de la limite en x_0 égale à $\pm\infty$.

3.2.3 Limite lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

Définition 3.2.4: Cas d'une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$

(i)
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0\ \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

(ii)
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists B < 0\ \forall x \in I, x \leq B \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Dans ce cas, on obtient une asymptote horizontale $y = \ell$.

3.2.4 Cas d'une limite infinie

Définition 3.2.5: Limites infinies à l'infini

(i)
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists B > 0\ \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A)$$

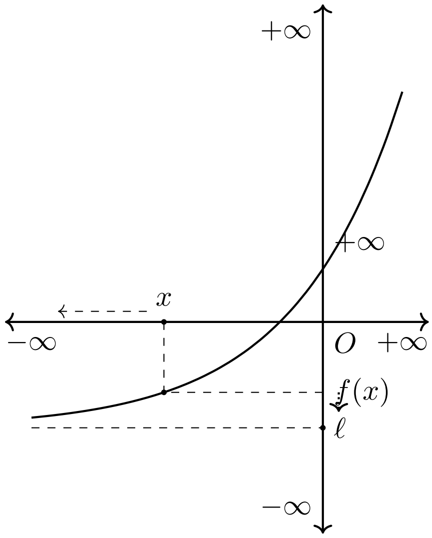

FIGURE 3.5 – Illustration de la limite lorsque x tend vers $+\infty$ égale à ℓ .

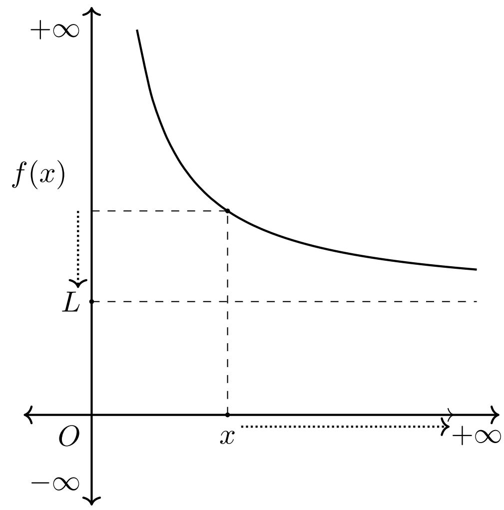

FIGURE 3.6 – Illustration de la limite lorsque x tend vers $+\infty$ égale à ℓ

FIGURE 3.7 – Illustration de la limite en $\pm\infty$ égale à ℓ.

(ii)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall A < 0, \exists B > 0\ \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow f(x) \leq A)$$

Dans ce cas, on obtient une branche parabolique qui tend vers l'infini. Pour déterminer la direction, on calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ existe alors la branche a une direction déterminée par la droite $y = ax$.

Si, de plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$ alors la droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique.

3.3 Fonctions continues

Avant de poser les équations, visualisons le concept. Une fonction est dite **continue** sur un intervalle si l'on peut tracer sa courbe représentative **sans lever le crayon** de la feuille. Il n'y a pas de "saut", de "trou" ou de rupture dans la courbe.

3.3.1 Continuité en un point (x_0)

C'est la définition fondamentale ("locale"). Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de cet intervalle ($x_0 \in I$).

Définition 3.3.1:

f est continue en x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I, \quad (|x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Cela implique trois conditions implicites :

* $f(x_0)$ existe (la fonction est définie au point).
* La limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe (limite finie).
* Ces deux valeurs sont identiques.

3.3.2 Continuité à gauche et à droite

Parfois, une fonction est définie par morceaux. On étudie alors la continuité de chaque côté.

Continuité à droite : $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Continuité à gauche : $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Théorème 3.3.1:
f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en ce point.

3.3.3 Continuité sur un intervalle

Dire que f est continue sur un intervalle I (par exemple $[a, b]$ ou $\mathbb{R}$) signifie simplement que f est continue **en tout point** x_0 appartenant à I.

Exemple 1:Les fonctions usuelles

Les fonctions suivantes sont continues sur leur domaine de définition :

— Les polynômes (sur $\mathbb{R}$).

— Les fonctions rationnelles (sur leur domaine, là où le dénominateur ne s'annule pas).

— La fonction exponentielle, logarithme, sinus, cosinus, racine carrée.

3.3.4 Prolongement par continuité

Soit $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit x_0 un point adhérent à A. On suppose que la fonction f n'est pas définie en x_0, ou bien que f y est définie sans être continue, et que la limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et est finie. Si l'on note L cette limite, on définit alors le prolongement par continuité de f au point x_0 comme la fonction $\tilde{f} : A \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0, \\ L & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Par construction, la fonction $\tilde{f}$ est continue en x_0, car elle vérifie $\tilde{f}(x_0) = L = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Exemple 2:

Soit $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Cette fonction n'est pas définie en 0. Cependant, on sait que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

On peut donc définir une nouvelle fonction $\tilde{f}$ (le prolongement) définie sur $\mathbb{R}$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Cette nouvelle fonction est continue en 0.

3.3.5 Propriétés fondamentales des fonctions continues

Théorème 3.3.2: Continuité de la composée

Soit $f : D_1 \to \mathbb{R}$ une fonction continue en x_0 et soit $g : D_2 \to \mathbb{R}$, avec $f(D_1) \subset D_2$, une fonction continue en $y_0 = f(x_0)$.
Alors, la fonction composée $g \circ f$ est continue en x_0.

Démonstration. L'objectif est de montrer que : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_1, |x - x_0| < \delta \implies |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon$.

1. **Continuité de g en $y_0 = f(x_0)$:** Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in D_2$:
$$|y - y_0| < \eta \implies |g(y) - g(y_0)| < \epsilon$$
2. **Continuité de f en x_0 :** Pour ce $\eta > 0$ précédemment trouvé, il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D_1$:
$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \eta$$
3. **Synthèse (Composition) :** Soit $x \in D_1$ tel que $|x - x_0| < \delta$. D'après le point (2), on a $|f(x) - f(x_0)| < \eta$. En posant $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$, on peut appliquer le point (1) car $|y - y_0| < \eta$. On en déduit :
$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon$$

La fonction $g \circ f$ est donc bien continue en x_0. ■

Il est important d'apprendre très précisément les énoncés suivants et de savoir les utiliser pour résoudre des équations ou étudier des fonctions.

Théorème 3.3.3: Théorème des Valeurs Intermédiaires - TVI

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour toute valeur k comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que :

$$f(c) = k.$$

En particulier, si $f(a)f(b) \leq 0$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration. Supposons, sans perte de généralité, que $f(a) < k < f(b)$. Considérons la fonction g définie par $g(x) = f(x) - k$. La fonction g est continue sur $[a, b]$ avec $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$. Nous voulons montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$.

On utilise une méthode par **dichotomie** :

1. On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

2. À chaque étape n, on considère le milieu $m_n = \frac{a_n+b_n}{2}$.
3. Si $g(m_n) = 0$, alors $c = m_n$ et la démonstration est terminée.
4. Si $g(m_n) < 0$, on pose $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
5. Si $g(m_n) > 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$.

Les suites (a_n) et (b_n) ainsi construites sont adjacentes :

— (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.

— $(b_n - a_n) = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ quand $n \to \infty$.

Par le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers une limite commune $c \in [a, b]$. Comme g est continue, on a :

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(c) \leq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} g(b_n) = g(c) \geq 0$$

Par encadrement, on en déduit que $g(c) = 0$, soit $f(c) = k$. ■

Théorème 3.3.4: Théorème des bornes atteintes / Weierstrass

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :

1. f est bornée sur $[a, b]$.
2. f atteint ses bornes. C'est-à-dire qu'il existe $x_m \in [a, b]$ et $x_M \in [a, b]$ tels que :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

Démonstration.

1. **f est bornée :** Supposons par l'absurde que f n'est pas bornée. On peut alors construire une suite (x_n) de $[a, b]$ telle que $|f(x_n)| \to +\infty$. D'après le théorème de **Bolzano-Weierstrass**, il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ convergeant vers $c \in [a, b]$. Par continuité, $f(x_{\phi(n)}) \to f(c)$, ce qui contredit $|f(x_n)| \to +\infty$. Donc f est bornée.
2. **f atteint ses bornes :** Soit $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Par définition du supremum, il existe une suite (x_n) telle que $f(x_n) \to M$. De même, on extrait une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ convergeant vers $x_M \in [a, b]$. Par continuité, $f(x_{\phi(n)}) \to f(x_M)$, d'où $f(x_M) = M$. (Le raisonnement est identique pour le minimum m).

■

Remarque 3:

Attention, pour le Théorème 3.3.5, l'intervalle doit être **fermé** ($[a, b]$). Si l'intervalle est ouvert (par exemple $]0, 1[$), la fonction peut ne pas être bornée (ex : $x \mapsto 1/x$) ou ne pas atteindre ses bornes (ex : $x \mapsto x$).

3.4 Fonction réciproque

Théorème 3.4.1: Fonction réciproque

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est **continue** et **strictement monotone** sur I, alors f réalise une bijection de I vers l'intervalle image $J = f(I)$. La fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est alors continue et strictement monotone (de même sens que f).