UNIVERSITÉ MOHAMED V
FACULTÉ DES SCIENCES RABAT
Département de Mathématiques

Filière :
Sciences Mathématiques (SM)
Analyse I

Analyse Réelle

Par
Prof : Mohamed Najib LAATABI
Email :laatabinajib43@gmail.com

Toute remarque de votre part est la bienvenue.
Si vous identifiez une erreur, veuillez la signaler.

Année Universitaire : **2025-2026**

Table des matières

Symboles et abréviations

Symbole	**Description / Signification**	**Chapitre**
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	Ensembles des entiers (nat., rel.), rationnels et réels	1
$\lvert x \rvert$	Valeur absolue de x	1
$\sup(E), \inf(E)$	Borne supérieure et borne inférieure de l'ensemble E	1
$E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$	Partie entière du réel x	1
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Suite numérique	2
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	Limite d'une suite	2
$\forall, \exists, \implies$	Pour tout, il existe, implique (Logique)	2
ϵ (epsilon)	Un réel strictement positif aussi petit que l'on veut	2
$f : I \to \mathbb{R}$	Fonction réelle définie sur un intervalle I	3
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	Limite de la fonction f quand x tend vers x_0	3
$f \circ g$	Composition des fonctions f et g	3
f^{-1}	Fonction réciproque de f	3
$f'(x)$	Dérivée première de f au point x	4
$f'_g(x), f'_d(x)$	Dérivée à gauche et dérivée à droite	4
$f^{(n)}(x)$	Dérivée d'ordre n (dérivées successives)	4
TAF / IAF	Théorème / Inégalité des Accroissements Finis	4
f''	Dérivée seconde (utilisée pour la convexité)	4

Chapitre 1 Nombres Réels

1.1 Propriétés élémentaires du corps des réels

Pour répondre aux besoins de comptage et de mesure, nous disposons depuis longtemps des trois ensembles fondamentaux suivants :

— **L'ensemble des entiers naturels** : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

— **L'ensemble des entiers relatifs** : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

— **L'ensemble des rationnels** : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\}$.

Il est évident que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Ces ensembles couvrent la plupart des besoins pour effectuer des calculs.

Cependant, les mathématiciens savent, depuis l'époque de Pythagore, qu'il existe des quantités qui ne peuvent être exprimées à l'aide de ces ensembles. Un exemple classique est la longueur x de la diagonale d'un carré de côté 1.

En effet, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$1^2 + 1^2 = x^2,$$

mais, comme le montre la proposition suivante, $x \notin \mathbb{Q}$.

Proposition 1.1.1:
Si x est solution de l'équation $x^2 = 2$, alors $x \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration. Nous allons démontrer ce résultat en utilisant la méthode du **raisonnement par l'absurde**.

Supposons que $x = \frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ sont premiers entre eux (c'est-à-dire que leur seul diviseur commun est 1).

Si $x^2 = 2$, alors :

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \implies p^2 = 2q^2.$$

Ainsi, p^2 est pair, ce qui implique que p est également pair (car le carré d'un entier impair est impair). On peut donc écrire $p = 2k$, où $k \in \mathbb{Z}$.

En substituant $p = 2k$ dans l'équation $p^2 = 2q^2$, nous obtenons :

$$(2k)^2 = 2q^2 \implies 4k^2 = 2q^2 \implies 2k^2 = q^2.$$

Ainsi, q^2 est pair, ce qui implique que q est également pair.

Cependant, cela contredit l'hypothèse selon laquelle p et q sont premiers entre eux (si p et q sont tous deux pairs, ils ont au moins 2 comme diviseur commun).

Par conséquent, notre supposition que $x \in \mathbb{Q}$ est fausse.

Conclusion : $x \notin \mathbb{Q}$.

■

La construction de l'ensemble des nombres réels a été un sujet d'étude approfondi pendant plusieurs décennies. Elle s'appuie exclusivement sur quelques axiomes fondamentaux qui prolongent de manière naturelle les propriétés de $\mathbb{Q}$. Bien que cette construction soit très enrichissante sur le plan conceptuel, elle ne sera pas abordée dans le cadre de ce cours. Nous nous limiterons à admettre l'existence de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, lequel satisfait les axiomes suivants :

Stabilité : $\forall x, y \in \mathbb{K}, x + y \in \mathbb{K}$ et $x \times y \in \mathbb{K}$

Commutativité : $\forall x, y \in \mathbb{K}, x + y = y + x$ et $x \times y = y \times x$

Associativité : $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, (x + y) + z = x + (y + z)$ et $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$

Distributivité : $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, x \times (y + z) = x \times y + x \times z$

Éléments neutres : $\exists 0, 1 \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{K}, x + 0 = x$ et $x \times 1 = x$

Opposés/Inverses : $\forall x \in \mathbb{K}, \exists(-x) \in \mathbb{K}, (-x) + x = 0$ et $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \exists x^{-1} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, x \times x^{-1} = 1,$

Propriété de la borne supérieure : Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

La relation d'ordre total permet de définir la fonction valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

1.2 Valeur Absolue

On définit sur $\mathbb{R}$ l'application "valeur absolue" par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 1:

D'après la définition de l'application valeur absolue, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| = |-x| = \max(x, -x).$$

Les résultats suivants sont très importants pour la manipulation de l'application valeur absolue d'un produit, une somme ou une différence de réels.

Proposition 1.2.1:

L'application valeur absolue vérifie les propriétés suivantes :

1. $x \in \mathbb{R}, \ |x| = 0 \iff x = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ |xy| = |x||y|$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \ |x|^2 = |x^2| = x^2$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y > 0, \ |x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ |x + y| \leq |x| + |y|$

6. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \; ||x| - |y|| \leq |x - y|$
7. $|x| = 0 \iff (|x| \leq \varepsilon, \; \forall \varepsilon > 0)$
8. $x \leq y \iff (x \leq y + \varepsilon, \; \forall \varepsilon > 0)$

Démonstration. Il est évident que si $|x| = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| \leq \varepsilon$.

Supposons maintenant que pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| < \varepsilon$, mais $|x| \neq 0$. En prenant $\varepsilon' = \frac{|x|}{2}$, on obtient une contradiction :

Puisque $|x| < \varepsilon' = \frac{|x|}{2}$, cela implique que $|x| < \frac{|x|}{2}$, ce qui est une contradiction.

Ainsi, notre supposition est fausse, et donc $|x| = 0$.

■

1.3 Bornes supérieure et inférieure

Définition 1.3.1:

Soit E un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$ et soient m et M deux réels.

On dit que E est une partie minorée par m (ou que m est un minorant de E) si $m \leq x, \; \forall x \in E$. Le plus grand minorant de E, noté $\inf E$, est appelé *borne inférieure* de E.

On dit que E est une partie majorée par M (ou que M est un majorant de E) si $x \leq M, \; \forall x \in E$. Le plus petit majorant de E, noté $\sup E$, est appelé *borne supérieure* de E.

On dit que E est une partie bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

Proposition 1.3.1:

Soit E une partie non-vide et minorée dans $\mathbb{R}$, alors

$$a = \inf E \iff (\forall x \in E, \; a \leq x) \text{ et } (\forall \varepsilon > 0, \; \exists x_\varepsilon \in E : a \leq x_\varepsilon < a + \varepsilon)$$

Démonstration. $\Rightarrow$ Supposons que $a = \inf E$. Soit $\varepsilon > 0$, $a + \varepsilon$ n'est pas un minorant pour E (d'après la définition de a). Donc il existe $x_\varepsilon \in E$ qui vérifie $a \leq x_\varepsilon < a + \varepsilon$.

$\Leftarrow$ Soient E une partie non-vide et minorée dans $\mathbb{R}$ et a un réel tels que

$$\forall x \in E, \; a \leq x \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0, \; \exists x_\varepsilon \in E : a \leq x_\varepsilon < a + \varepsilon.$$

Il est clair que a est un minorant de E. Supposons qu'il existe un minorant de E, noté a', qui soit strictement plus grand que a. Pour $\varepsilon = \frac{a'-a}{2} > 0$, il existe $x_\varepsilon \in E$ tel que $x_\varepsilon < a + \varepsilon = \frac{a'+a}{2} < a'$. Ceci est impossible car a' est un minorant de E.

■

Proposition 1.3.2:

Soit E une partie non-vide et majorée dans $\mathbb{R}$, alors

$$b = \sup E \iff (\forall x \in E, \; x \leq b) \text{ et } (\forall \varepsilon > 0, \; \exists x_\varepsilon \in E : b - \varepsilon < x_\varepsilon \leq b)$$

Proposition 1.3.3:

Lorsque la borne inférieure (ou supérieure) existe, elle est unique.

Démonstration. Supposons qu'il existe E, une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée, qui admet deux bornes inférieures b et $b' \in \mathbb{R}$ avec $b \leq b'$. Supposons que $b < b'$ et soit $\varepsilon = b' - b$. D'après la caractérisation de la borne inférieure, il existe $x \in E$ tel que

$$b' = b + \varepsilon < x \leq b.$$

Ceci contredit le fait que b' est une borne inférieure de E. ■

Les deux propriétés suivantes caractérisent l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

Propriété de la borne inférieure :
Toute partie E non-vide et minorée admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Propriété de la borne supérieure :
Toute partie E non-vide et majorée admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Si E est une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et non majorée (respectivement non minorée) on pose $\sup E = +\infty$ (respectivement $\inf E = -\infty$).

Remarque 2:

Les deux propriétés ci-dessus sont équivalentes

1.4 Propriété d'Aarchimède

Archimède fut le premier à constater qu'un voyageur partant à pied d'un point A peut atteindre un point C, après un nombre fini de pas. Ce constat, appelé Propriété d'Archimède, peut être formulé comme suit :

Théorème 1.4.1: (Propriété d'Archimède)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x < ny$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ ny \leq x.$$

Définissons $A = \{ny : n \in \mathbb{N}\}$. Alors A est une partie de $\mathbb{R}$, non vide car $0 \in A$, et majorée par x.
D'après le principe de la borne supérieure, A admet une borne supérieure $s = \sup(A)$ dans $\mathbb{R}$.
Par définition de la borne supérieure :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ ny \leq s,$$

et

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } s - \epsilon < n_0 y \leq s.$$

Prenons $\epsilon = y$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$s - y < n_0 y \leq s.$$

En ajoutant y des deux côtés de l'inégalité $s - y < n_0 y$, on obtient :

$$s < (n_0 + 1)y.$$

Puisque $(n_0 + 1)y \in A$ (car $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$), cela contredit le fait que s est la borne supérieure de A.
Ainsi, l'hypothèse $\forall n \in \mathbb{N},\ ny \leq x$ est fausse.

Conclusion : Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < ny$.

■

Théorème 1.4.2:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists! m \in \mathbb{Z} \text{ tel que } m \leq x < m + 1.$$

De plus, m est appelé la partie entière de x (et on note m par $E(x)$).

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons l'ensemble

$$B = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

1. B est non vide :
Supposons par l'absurde que B est vide. Cela signifierait que $x < n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Prenons $x = 1$. Cela impliquerait que $1 < n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ce qui est absurde. Donc B est non vide.

2. B est majoré :
Clairement, $B \subseteq \mathbb{Z}$ et tout $n \in B$ satisfait $n \leq x$. Par conséquent, B est majoré par x.

3. Existence d'un maximum :
Puisque B est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$, B admet un maximum $m_0 = \max(B)$. Par définition de B, on a $m_0 \leq x$, et comme m_0 est le maximum, $m_0 + 1 > x$.

4. Unicité de m_0 :
Supposons qu'il existe un autre entier $m_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $m_1 \leq x < m_1 + 1$. Par définition de B, $m_1 \in B$, mais comme $m_1 \neq m_0$, cela impliquerait $m_1 > m_0$, ce qui contredit le fait que $m_0 = \max(B)$. Ainsi, m_0 est unique.

Conclusion : Il existe un unique entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leq x < m + 1$, et m est la partie entière de x.

■

1.5 La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.5.1:

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Puisque $\mathbb{R}$ Archimède, montrons que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. On a alors :

$$0 < y - x.$$

D'après l'axiome d'Archimède, il existe un entier naturel $m \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$0 < 1 < m(y - x).$$

Cela implique :

$$1 + mx < my.$$

En posant $n = E(mx)$ (la partie entière de mx), on a $n \in \mathbb{Z}$ et :

$$n \leq mx < n + 1.$$

En divisant par m, on obtient :

$$\frac{n}{m} \leq x < \frac{n+1}{m}.$$

Posons $p = n + 1$. On a alors :

$$x < \frac{p}{m} \quad \text{et} \quad \frac{p}{m} \in \mathbb{Q}.$$

De plus, puisque $p < mx + 1$, on en déduit que :

$$\frac{p}{m} < y.$$

Ainsi, $\frac{p}{m} \in \mathbb{Q}$ vérifie $x < \frac{p}{m} < y$.

Conclusion :

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$, il existe un $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$. Par conséquent, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. ■