Suites de Fonctions

MODE DE CONVERGENCE

Convergence simple (CS)

On dit que $(f_n)_n$ converge simplement sur A si, et seulement si, pour tout $x \in A$ la suite $(f_n(x))$ converge dans F.
On appelle limite ou limite simple de la suite $(f_n(x))$, la fonction $f \in F^A$ [a] définie par:

$$\forall x \in A, \quad f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

On écrit $f_n \xrightarrow[A]{cvu} f$.

[a] $f : A \to F$

Convergence uniforme (CU)

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f si :

1. *Il existe n_0 à partir duquel $(f_n - f)$ est bornée*
2. $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

On note $f_n \xrightarrow{cvu} f$ ou $f_n \xrightarrow[A]{cvu} f$

Propriété caractéristique

$$f_n \xrightarrow[A]{cvu} f \Leftrightarrow \begin{cases} * f_n \xrightarrow[A]{cvs} f \\ * \|f_n - f\|_\infty^A \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \end{cases},$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} * \exists (\varepsilon_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \text{ telle que } \lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0 \\ * \forall x \in A \ \|f_n - f\|_\infty^A \leqslant \varepsilon_n. \end{cases}.$$

La non convergence uniforme

Si $f_n \xrightarrow[A]{cvs} f$ et $\exists (\varepsilon_n) \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ [a] telle que

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(\varepsilon_n) - f(\varepsilon_n) \nrightarrow 0,$$

alors f_n ne converge pas uniformément vers f sur A

[a] $\varepsilon_n : \mathbb{N} \to A$

CU ⇒ CS

$f_n \xrightarrow[A]{cvu} f$, *alors* $f_n \xrightarrow[A]{cvs} f$.

Exemple de Convergence Uniforme

Considérons la suite de fonctions :

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \quad \text{pour } x \in [0,1].$$

f_n converge uniformément vers $f = 0$ sur $[0,1]$. On a :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - 0| = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

f_n converge simplement vers $f = 0$:

INTERVERSION DES LIMITES

Théorème d'interversion des limites

Soit $a \in \bar{A}$.

$$\textbf{Si: } \begin{cases} \star \forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{x \to a} f_n(x) \text{ existe et égale } b_n \in F \\ \star f_n \xrightarrow[A]{cvu} f \end{cases},$$

$$\textbf{Alors: } \begin{cases} \star \text{La suite } (bn) \text{converge;} \\ \star f \text{admet une limite en } a; \\ \star \lim\limits_{x \to a} f_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n. \end{cases}.$$

Autrement-dit:

$$\lim_{x \to a} (\lim_{n \to +\infty} f_n(x)) = \lim_{n \to +\infty} (\lim_{x \to a} f_n(x))$$

♣ *Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite b_n en $a \in \bar{A}$ et la suite (b_n) diverge, alors (f_n) ne converge pas uniformément*

CONTINUITÉ

Continuité par convergence uniforme

$$\textbf{Si: } \begin{cases} \star \forall n \in \mathbb{N}, f_n \textbf{ continue sur } A; \\ \star f_n \xrightarrow[A]{cvu} f \end{cases},$$

Alors: *f est continue sur A.*

Continuité par convergence uniforme locale

$$\textbf{Si: } \begin{cases} \star \forall n \in \mathbb{N}, f_n \textbf{ continue sur } A; \\ \star f_n \xrightarrow{cvu} f \textbf{ sur tout compact inclus dans } A. \end{cases},$$

Alors: *f est continue sur A.*

INTERVERSION lim et $\int$

Interversion lim et $\int$

Soit (f_n) une suite de fonction de $[a,b]$ dans F

$$\textbf{Si: } \begin{cases} \star \forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}([a,b], F); \\ \star (f_n) \text{ converge uniformément sur } [a,b]. \end{cases}$$

$$\textbf{Alors: } \begin{cases} \star \lim f_n \text{ est continue sur } [a,b]; \\ \star \text{La suite } (\int_a^b f_n)_n \text{ converge ;} \\ \star \text{On a l'interversion } \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_a^b f_n(t)dt = \int\limits_a^b \lim\limits_{n \to \infty} f_n(t)dt. \end{cases}$$

Convergence uniforme et primitive

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}(I,F)$. Si:
(f_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers f.
Pour tout $a \in I$, on pose

$$\varphi : x \mapsto \int_a^x f(t)dt \ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)dt$$

Alors (φ_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers φ

Théorème de convergence dominée

Théorème de convergence dominée

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que :

$$\begin{cases} \bullet \forall n \in \mathbb{N}, f_n \in C_m(I, \mathbb{K})^a; \\ \bullet f_n \xrightarrow{cvs} f \in C_m(I, \mathbb{K}); \\ \bullet \exists \varphi \in C_m(I, \mathbb{R}^+), \text{ intégrable, telle que:} \\ \forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi \quad \text{[hypothèse de domination].} \end{cases}$$

Alors *:*

$$\begin{cases} \bullet \text{ Les applications } f_n \text{ et } f \text{ sont intégrables sur } I; \\ \bullet \text{ La suite } \left(\int_I f_n\right) \text{ converge et } \lim\limits_{n \to +\infty} \int_I f_n = \int_I f. \end{cases}$$

♣ *Le théorème de convergence dominée (TCVD) n'exige pas la convergence uniforme de (f_n), mais impose que $f \in C_m(I, \mathbb{K})$.*

[a] $C_m(I, \mathbb{K})$: Représente les fonctions continues par morceaux sur I.

RÉGULARITÉ DE LA LIMITE

Interversion limite-dérivée

Si:

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ *est de classe* $C^1(I, F)$*;*
- (f_n) *converge simplement sur* I*;*
- (f_n') *converge uniformément sur tout segment inclus dans* I*.*

Alors:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n \in C^1(I, F)$*;*
- $\left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n'$*;*
- (f_n) *converge uniformément sur tout segment inclus dans* I*.*

Interversion limite-dérivées successives

Soit $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

Si:

- $\forall n \in \mathbb{N}$ *(ou à pcr)* $f_n \in C^p(I, F)$*;*
- $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $(f_n^{(k)})$ *converge simplement sur* I*;*
- $(f_n^{(p)})$ *converge uniformément sur tout segment inclus dans* I*.*

Alors:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n$ *est de classe* C^p *sur* I*;*
- $\forall k \in [\![0, p]\!]$, $(f_n^{(k)})$ *converge uniformément sur tout segment inclus dans* I*;*
- *On a les interversions*

$$\forall k \in [\![0, p]\!], \quad \left(\lim_{n \to +\infty} f_n\right)^{(k)} = \lim_{n \to +\infty} f_n^{(k)}.$$

Informations de Contact

Téléphone : *+212 6 82 25 56 48*
Email : *laatabinajib43@email.com*
Site Web : *Mohamed Najib Laatabi*