UNIVERSITÉ MOHAMED V
FACULTÉ DES SCIENCES RABAT
Département de Mathématiques

Filière :

Sciences Mathématiques (SM)

Analyse I

Analyse Réelle

Par
Prof : Mohamed Najib LAATABI
Email :laatabinajib43@gmail.com

Toute remarque de votre part est la bienvenue.
Si vous identifiez une erreur, veuillez la signaler.

Année Universitaire : **2025-2026**

Table des matières

1 Nombres Réels **1**

2 Suites numériques **1**
2.1 Généralités sur les suites 1
2.1.1 Définition 1
2.1.2 Opérations sur l'ensemble des suites numériques 1
2.2 Le principe de récurrence 2
2.2.1 Principe du raisonnement par récurrence 3
2.3 Variations, monotonie d'une suite 3
2.3.1 Suites bornées 3
2.4 Suites particulières 4
2.4.1 Suites arithmétiques 4
2.4.2 Suites géométriques 5
2.4.3 Suites récurrentes 6
2.5 Nature d'une suite 6
2.5.1 Limite finie 6
2.5.2 Limite infinie 10
2.6 Suites de Cauchy 10
2.6.1 Sous-suite 12

3 Limites et fonctions continues **12**

4 Fonctions dérivables **12**

Symboles et abréviations

Symbole	Description / Signification	Chapitre
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	Ensembles des entiers (nat., rel.), rationnels et réels	1
$\|x\|$	Valeur absolue de x	1
$\sup(E), \inf(E)$	Borne supérieure et borne inférieure de l'ensemble E	1
$E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$	Partie entière du réel x	1
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Suite numérique	2
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	Limite d'une suite	2
$\forall, \exists, \implies$	Pour tout, il existe, implique (Logique)	2
ϵ (epsilon)	Un réel strictement positif aussi petit que l'on veut	2
$f : I \to \mathbb{R}$	Fonction réelle définie sur un intervalle I	3
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	Limite de la fonction f quand x tend vers x_0	3
$f \circ g$	Composition des fonctions f et g	3
f^{-1}	Fonction réciproque de f	3
$f'(x)$	Dérivée première de f au point x	4
$f'_g(x), f'_d(x)$	Dérivée à gauche et dérivée à droite	4
$f^{(n)}(x)$	Dérivée d'ordre n (dérivées successives)	4
TAF / IAF	Théorème / Inégalité des Accroissements Finis	4
f''	Dérivée seconde (utilisée pour la convexité)	4

Chapitre

2 Suites numériques

2.1 Généralités sur les suites

2.1.1 Définition

D'une façon générale, on définit une suite comme une succession ordonnée d'éléments pris dans un ensemble donné.

Définition 2.1.1:

Une suite numérique, dite aussi suite réelle, est une application u d'une partie I de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On la note $\{u(n), n \in I\}$, $(u_n)_{n\in I}$ ou tout simplement $(u_n)_n$.

L'ensemble I s'appelle le domaine de la suite et u_n s'appelle son terme général.

Remarque 1:

1. Une suite $(u_n)_n$ peut être définie par l'expression de son terme général u_n en fonction de n.
2. Elle peut également être définie par la valeur du premier terme et par une relation de récurrence, c'est-à-dire une relation liant deux termes généraux successifs. On dit alors que c'est une suite récurrente.

Exemple 1:

1. $(a_n)_n$, la suite définie par : $a_n = (-1)^n$, qui alterne entre 1 et -1.
2. $(b_n)_n$, la suite définie par : $b_n = \frac{n^2}{n+1}$, qui tend vers n lorsque n devient grand.

2.1.2 Opérations sur l'ensemble des suites numériques

Les suites numériques permettent de réaliser différentes opérations mathématiques qui sont souvent utilisées dans les démonstrations et les analyses de convergence.

Définition 2.1.2: Addition et Multiplication des suites

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques.

L'addition des suites est définie terme à terme par :

$$(w_n)_n = (u_n + v_n)_n, \quad \text{pour tout } n.$$

Autrement dit, pour chaque indice n, le terme général de la nouvelle suite (w_n) est la somme des termes correspondants des suites (u_n) et (v_n).

La multiplication des suites numériques est également définie terme à terme par :

$$(w_n)_n = (u_n \times v_n)_n, \quad \text{pour tout } n.$$

Ainsi, pour chaque n, le terme général de la nouvelle suite (w_n) est le produit des termes correspondants des suites (u_n) et (v_n).

Soit λ un réel. Le produit de la suite par un scalaire est défini par :

$$(v_n)_n = (\lambda u_n)_n, \quad \text{pour tout } n.$$

Chaque terme de la nouvelle suite (v_n) est obtenu en multipliant chaque terme de la suite (u_n) par λ.

Exemple 2:

Soient $(u_n)_n = \frac{1}{n}$ et $(v_n)_n = (-1)^n$. Alors, la suite $(w_n)_n = (u_n + v_n)_n$ est définie par :

$$w_n = \frac{1}{n} + (-1)^n.$$

Soient $(u_n)_n = \frac{1}{n}$ et $(v_n)_n = \cos(n\pi)$. Alors, la suite $(w_n)_n = (u_n \times v_n)_n$ est donnée par :

$$w_n = \frac{1}{n} \times \cos(n\pi).$$

Si $\lambda = 2$ et $(u_n)_n = \frac{1}{n}$, la suite $(v_n)_n$ est donnée par :

$$v_n = 2 \times \frac{1}{n} = \frac{2}{n}.$$

Opérations de sommes et de différences

Les suites peuvent également être additionnées ou soustraites terme à terme, et des expressions comme la somme ou la différence de deux suites peuvent être manipulées de manière similaire aux opérations sur des nombres réels.

2.2 Le principe de récurrence

Ce principe de démonstration par récurrence s'applique lorsqu'on cherche à démontrer qu'une propriété $\mathcal{P}_n$ dépendant d'un entier naturel n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, n_0 étant un entier naturel donné.

2.2.1 Principe du raisonnement par récurrence

On considère une propriété $\mathcal{P}_n$. Pour démontrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on procède en trois étapes :
A) Initialisation : on montre que la propriété est vraie pour $n = n_0$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie.
B) Hérédité : on démontre que si la propriété est vraie pour un entier $k \geq n_0$, alors elle est vraie pour l'entier suivant $k+1$. Autrement dit si $\mathcal{P}_k$ est vraie alors $\mathcal{P}_{k+1}$.
On dit que la propriété est héréditaire à partir du rang n_0.
C) Conclusion :

— la propriété est initialisée,

— elle est héréditaire.

Par conséquent[a], $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.
[a] Il est primordial que les deux conditions de ce principe soient réunies !

2.3 Variations, monotonie d'une suite

2.3.1 Suites bornées

Définition 2.3.1: Suites bornées :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :

a) **majorée** (ou **bornée supérieurement**) s'il existe un nombre $M \in \mathbb{R}$ tel que :
$$u_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
On dit alors que M est un *majorant* de la suite.

b) **minorée** (ou **bornée inférieurement**) s'il existe un nombre $m \in \mathbb{R}$ tel que :
$$m \leq u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
On dit alors que m est un *minorant* de la suite.

c) **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe deux nombres $m, M \in \mathbb{R}$ tels que :
$$m \leq u_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 2:

$$\begin{aligned}
(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée } &\iff E = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ est majoré,}\\
(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est minorée } &\iff E = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ est minoré,}\\
(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } &\iff E = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ est borné.}
\end{aligned}$$

Définition 2.3.2:

Soit (u_n) une suite. On dit que :

a) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante* si pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n \leq u_{n+1}$;

b) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *décroissante* si pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n \geq u_{n+1}$;

c) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *monotone* si elle est croissante ou décroissante ;

d) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *constante* si pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n$.

Remarque 3:

— Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes : $u_n = (-1)^n$.

— Les premiers termes de la suite n'entrent pas forcément en compte dans la variation d'une suite. Ils peuvent cependant donner une indication sur la monotonie de la suite.

Remarque 4:

Pour déterminer le sens de variation d'une suite (u_n), on peut utiliser l'une des règles suivantes :

a) On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

— Si $u_{n+1} - u_n$ est positive, alors la suite (u_n) est croissante.

— Si $u_{n+1} - u_n$ est négative, alors la suite (u_n) est décroissante.

b) Si tous les termes de la suite sont strictement positifs, alors il suffit de comparer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

— Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite (u_n) est croissante.

— Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

c) On utilise un raisonnement par récurrence (voir dans la suite de cours).

2.4 Suites particulières

Les suites se distinguent par des propriétés particulières qui les rendent intéressantes et méritent ainsi un traitement spécifique. Parmi elles, les suites arithmétiques et les suites géométriques jouent un rôle fondamental dans divers domaines mathématiques, en raison de leurs caractéristiques uniques.

2.4.1 Suites arithmétiques

Une suite arithmétique est une suite numérique dans laquelle la différence entre deux termes successifs est constante. Cette constante est appelée la raison de la suite.

Définition 2.4.1:
Une suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r si, pour tout n, on a :

$$u_{n+1} = u_n + r, \quad \text{pour tout } n.$$

Autrement dit, la suite arithmétique est définie par une relation de récurrence dans laquelle chaque terme est obtenu en ajoutant la même constante r au terme précédent.

Exemple 3:
La suite (u_n) définie par $u_n = 3n + 2$ est une suite arithmétique de raison $r = 3$, car :

$$u_{n+1} = 3(n+1) + 2 = 3n + 5 = u_n + 3.$$

2.4.2 Suites géométriques

Une suite géométrique est une suite numérique dans laquelle chaque terme est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante appelée la raison de la suite.

Définition 2.4.2:
Une suite (v_n) est une suite géométrique de raison q si, pour tout n, on a :

$$v_{n+1} = v_n \times q, \quad \text{pour tout } n.$$

Ainsi, chaque terme de la suite est le produit du terme précédent par un facteur constant q, appelé raison.

Exemple 4:
La suite (v_n) définie par $v_n = 2^n$ est une suite géométrique de raison $q = 2$, car :

$$v_{n+1} = 2^{n+1} = 2^n \times 2 = v_n \times 2.$$

Exemple 5:De la feuille à la Lune !
Imaginons que nous avons une feuille de papier dont l'épaisseur initiale est de 1 mm. Si nous plions cette feuille une fois, son épaisseur sera doublée. Après chaque pli, l'épaisseur de la feuille est multipliée par 2. Cela suit donc une suite géométrique de raison 2, où chaque terme représente l'épaisseur de la feuille après n plis. Ainsi, après n plis, l'épaisseur E_n de la feuille est donnée par :

$$E_n = 1 \times 2^n \text{ mm}.$$

Calcul de l'épaisseur après 50 plis
Après 50 plis, l'épaisseur de la feuille sera :

$$E_{50} = 2^{50} \text{ mm}.$$

Pour mieux comprendre cette valeur, nous allons la convertir en kilomètres. Comme $1\,\text{km} = 10^6\,\text{mm}$, nous avons :

$$E_{50} = \frac{2^{50}}{10^6}\,\text{km}.$$

Calculons la valeur exacte de 2^{50} :

$$2^{50} = 1125899906842624.$$

Ainsi, l'épaisseur de la feuille après 50 plis est :

$$E_{50} = \frac{1125899906842624}{10^6}\,\text{km} = 1125899906.842624\,\text{km}.$$

Comparaison avec la distance Terre-Lune

La distance moyenne entre la Terre et la Lune est d'environ 384400 km. Comparons cette distance à l'épaisseur de la feuille après 50 plis :

$$E_{50} = 1125899906.842624\,\text{km} \quad \text{et} \quad 384400\,\text{km}.$$

Nous constatons que l'épaisseur de la feuille, après seulement 50 plis, est largement supérieure à la distance entre la Terre et la Lune. Cet exemple montre l'énorme croissance d'une suite géométrique, où chaque terme est obtenu en multipliant le terme précédent par 2.

2.4.3 Suites récurrentes

Exemple 6:

$(c_n)_n$, la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} c_0 = 2, \\ c_{n+1} = 3c_n + 1 \quad \text{pour} \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Cette suite est une suite linéaire récurrente.

2.5 Nature d'une suite

On s'intéresse dans cette section au comportement d'une suite pour les très grandes valeurs de l'entier n (lorsque n tend vers l'infini). On parlera ainsi de la limite d'une suite (u_n) et on notera :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n.$$

2.5.1 Limite finie

Définition 2.5.1: Convergence d'une suite réelle

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* (ou est *convergente*) vers un réel $L \in \mathbb{R}$ lorsque $n \to +\infty$, ce que l'on note $(u_n)_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$, si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_\varepsilon,\ |u_n - L| < \varepsilon.$$

C'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang N_ε (qui dépend de ε), les termes de la suite s'approchent de L.
On écrit alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L \quad \text{où} \quad L \in \mathbb{R}.$$

Exemple 7:

Montrons que la suite $(u_n) = \frac{1}{n}$ converge vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le Propriété d'Archimède (*Soit* $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists n \in \mathbb{N}$ *tel que* $x < ny$.), pour $x = 1$ et $y = \varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$1 < N_\varepsilon \varepsilon,$$

donc

$$\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Alors, pour tout $n \geq N_\varepsilon$,

$$|u_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Donc, par définition, (u_n) converge vers 0.

Remarque 5:

$$|u_n - L| < \varepsilon \iff -\varepsilon < u_n - L < \varepsilon \iff L - \varepsilon < u_n < L + \varepsilon \iff u_n \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[.$$

Ainsi, si la suite $(u_n)_n$ converge vers L, on dit qu'à partir d'un certain rang N_ε, u_n appartient à un *voisinage* de L.
Un voisinage de L est un intervalle ouvert de la forme :

$$]L - \varepsilon, L + \varepsilon[.$$

Cette définition de la convergence est formellement adéquate, mais elle n'est pas d'utilisation simple.

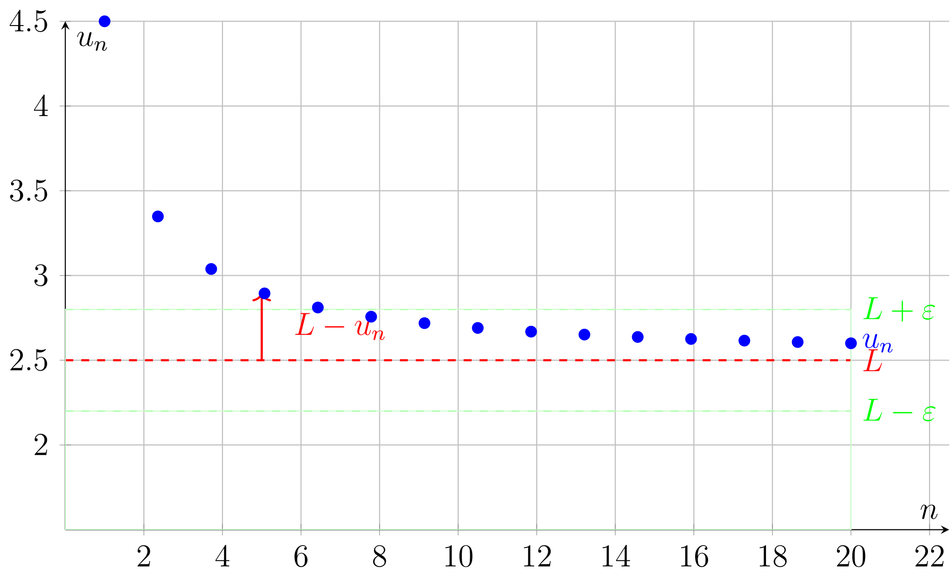

FIGURE 2.1 – Convergence de u_n vers L avec ε-voisinage

Définition 2.5.2:

Une suite $(u_n)_n$ diverge (ou est divergente), on note $(u_n)_n$ D.V, si et seulement si la suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente

Propriété 2.5.1: Unicité de la limte

La limite d'une suite (si elle existe) est unique.

Démonstration. La preuve se fait par l'absurde. On suppose que $L_1 \neq L_2$ et que $L_1 = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $L_2 = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \text{ et } \exists N_2 : \forall n \geq N = \max(N_1, N_2) \text{ on a : } |u_n - L_1| < \epsilon \text{ et } |u_n - L_2| < \epsilon$$

D'où $\forall \epsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N$ on a :

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - u_n + u_n - L_2| \leq |u_n - L_1| + |u_n - L_2| < 2\epsilon$$

et donc $|L_1 - L_2| = 0$ c'est-à-dire $L_1 = L_2$ ce qui est absurde. ■

Théorème 2.5.1: Théorème d'encadrement

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que :

$$u_n \leq w_n \leq v_n, \quad \forall n \geq m, \text{ où } m \in \mathbb{N}.$$

Si

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = L,$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = L.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N_1, \quad |u_n - L| < \varepsilon.$$

De même, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N_2, \quad |v_n - L| < \varepsilon.$$

Posons $N = \max(N_1, N_2, m)$.

Alors, pour tout $n \geq N$, on a :

$$L - \varepsilon < u_n < L + \varepsilon, \quad \text{et} \quad L - \varepsilon < v_n < L + \varepsilon.$$

Or, pour ces mêmes n, on sait que $u_n \leq w_n \leq v_n$. On en déduit :

$$L - \varepsilon < w_n < L + \varepsilon,$$

soit encore :

$$|w_n - L| < \varepsilon.$$

Ainsi, par définition de la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = L.$$

■

Exemple 8:

Considérons la suite

$$w_n = \frac{\sin(n^2)}{n+1}.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, il suit que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{-1}{n+1} \leq \frac{\sin(n^2)}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Posons $u_n = \dfrac{-1}{n+1}$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$. On a $u_n \leq w_n \leq v_n$ pour tout n, et

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} v_n = 0.$$

Par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$.

Théorème 2.5.2:

Soit une suite $(u_n)_n$, où $n \in \mathbb{N}$,

1) Si la suite $(u_n)_n$ converge, alors elle est bornée (on dit que toute suite convergente est bornée),

2) Si la suite $(u_n)_n$ est non bornée alors elle est divergente.

Démonstration. 1) Si la suite $(u_n)_n$ converge vers L, on a

$$\lim u_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ tel que } n > N_\varepsilon, |u_n - L| < \varepsilon$$

On a :

$$u_n = u_n - L + L$$

Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ tel que } n > N_\varepsilon, |u_n| \leq |u_n - L| + |L| \leq \varepsilon + |L|$$

donc

$$\forall n > N_\varepsilon, |u_n| \leq \varepsilon + |L|$$

Soit $M = \sup(|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_{N_\varepsilon}|, \varepsilon + |L|)$
On a : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ c'est-à-dire la suite $(u_n)_n$ est bornée.

2) C'est la contraposée de 1) ■

Remarque 6:

La réciproque du Théorème 2.5.1 est fausse. En effet, soit la suite $(u_n)_n$ de terme général définie par $u_n = (-1)^n$.

On a : $\forall n, |u_n| \leq 1$ (car $\forall n, -1 \leq (-1)^n \leq 1$) mais la suite $(u_n)_n$ est divergente.

2.5.2 Limite infinie

Définition 2.5.3: Divergence d'une suite réelle

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $+\infty$ (ou *tend vers* $+\infty$) si et seulement si :

$$\forall A > 0,\ \exists N_A \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_A,\ u_n \geq A.$$

On note alors :

$$(u_n)_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad \text{ou encore} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Autrement dit, les termes de la suite deviennent *aussi grands que l'on veut* à partir d'un certain rang N_A : à partir de ce rang, tous les termes u_n dépassent la borne A.

De méme pour $-\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists N_A \in \mathbb{N}^* : \forall n > N_A, u_n < -A$$

2.6 Suites de Cauchy

Définition 2.6.1: Suite de Cauchy

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **suite de Cauchy** dans $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall p \geq N_\varepsilon,\ \forall q \geq N_\varepsilon,\ |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Autrement dit, à partir d'un certain rang N_ε, tous les termes de la suite sont "regroupés" dans un intervalle de taille inférieure à ε.

Théorème 2.6.1:
Toute suite convergente dans $\mathbb{R}$ est une suite de Cauchy.

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergente dans $\mathbb{R}$, et soit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = c.$$

Alors, par définition de la convergence :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall n \geq N_\varepsilon,\ |u_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient maintenant $p, q \geq N_\varepsilon$. On a :

$$|u_p - u_q| = |u_p - c + c - u_q| \leq |u_p - c| + |u_q - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. ∎

Théorème 2.6.2:
Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ est convergente dans $\mathbb{R}$.

Exemple 9:

Considérons la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n}.$$

Montrons que (u_n) est une suite de Cauchy.

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p > q$. Alors

$$|u_p - u_q| = \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| = \frac{|p-q|}{pq} \leq \frac{1}{q}.$$

Or, pour tout $\varepsilon > 0$, si l'on choisit $N_\varepsilon > E(\frac{1}{\varepsilon})$, on a pour tout $p, q \geq N_\varepsilon$:

$$|u_p - u_q| \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Ainsi, la condition

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall p, q \geq N_\varepsilon,\ |u_p - u_q| < \varepsilon$$

est satisfaite. Donc (u_n) est une **suite de Cauchy**.

De plus, on sait que (u_n) converge vers 0, ce qui confirme la **complétude de** $\mathbb{R}$: toute suite de Cauchy y est convergente.

2.6.1 Sous-suite

Définition 2.6.2: Sous-suite ou suite extraite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle **sous-suite** (ou **suite extraite**) de (u_n) toute suite de la forme

$$(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}},$$

où la suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est définie par une application strictement croissante

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad k \longmapsto n_k = \varphi(k).$$

Autrement dit, on a

$$n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$$

Exemple 10:

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = (-1)^n.$$

1. Sous-suite valide : Considérons l'application strictement croissante

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad \varphi(k) = 2k.$$

La suite extraite correspondante est

$$u_{n_k} = u_{2k} = (-1)^{2k} = 1.$$

Ainsi, $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, \dots)$ est une **sous-suite constante** de (u_n).

2. Cas qui *n'est pas* une sous-suite : Si l'on considère une suite d'indices définie par

$$n_k = \pi k,$$

alors (n_k) n'est **pas** à valeurs entières. Or, pour qu'une suite (u_{n_k}) soit une sous-suite de (u_n), il faut que $n_k \in \mathbb{N}$ pour tout k. Ainsi, la suite $(u_{\pi k})$ n'a **aucun sens** dans $\mathbb{R}$, car les indices πk ne sont pas des entiers naturels.

Autrement dit, pour définir une sous-suite, les indices doivent être choisis parmi les entiers naturels, dans un ordre strictement croissant.