

Analyse mathématique de la croissance et de la compétition microbiennes

Mohamed Najib Laatabi

Université Mohammed V de Rabat
Encadrants : Abdellah Alla et Mohamed Toumlilin

International Meeting on Applied Mathematics in Errachidia
(IMAME'2025)
April 22–25, 2025, Morocco

Plan

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion

1 Introduction

2 Modèle du Chémostat Déterministe

Propriétés mathématiques du modèle

Diagrammes opératoires et Présence de biomasse

3 Modèle du Chémostat Stochastique

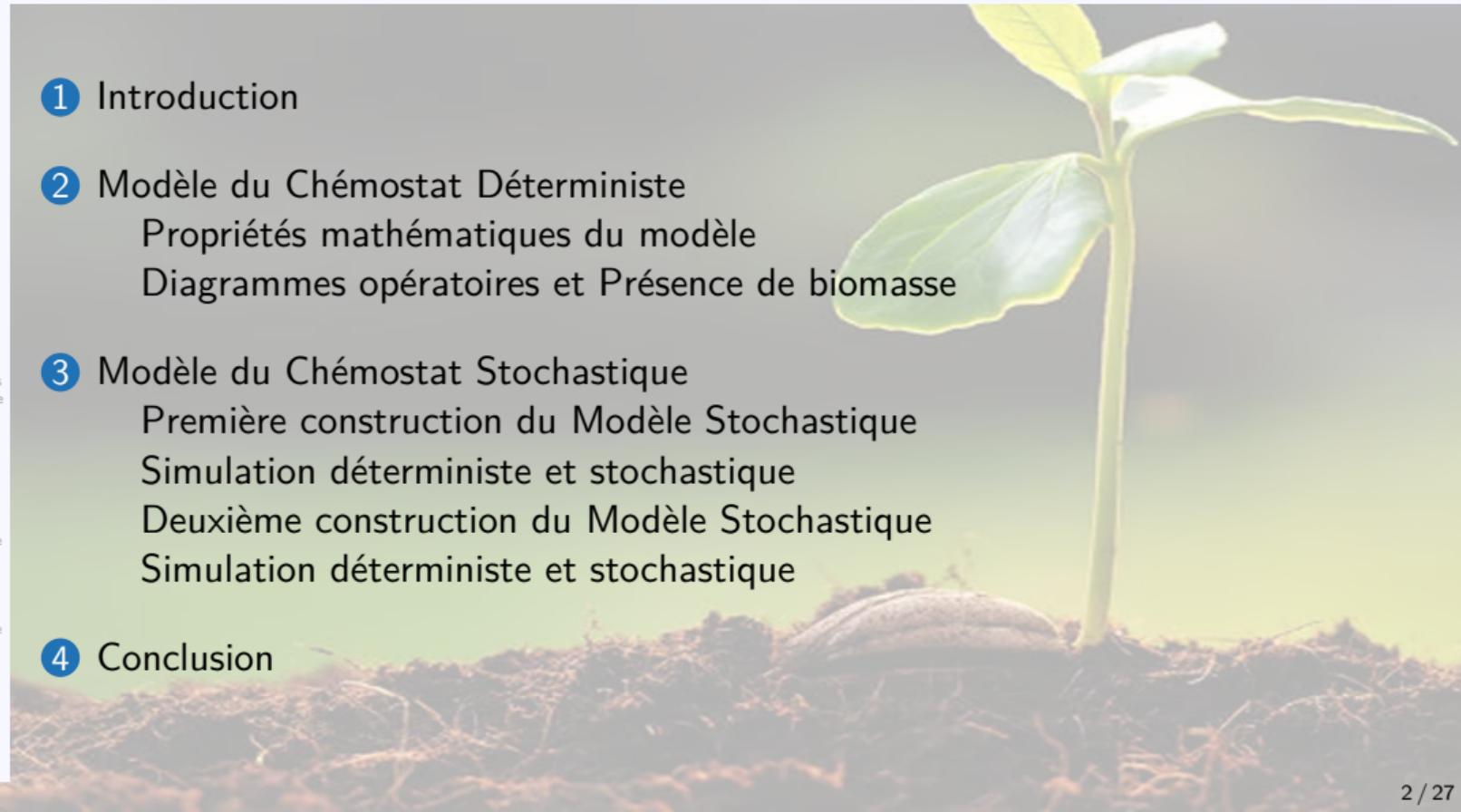
Première construction du Modèle Stochastique

Simulation déterministe et stochastique

Deuxième construction du Modèle Stochastique

Simulation déterministe et stochastique

4 Conclusion



Introduction

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opérateurs
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

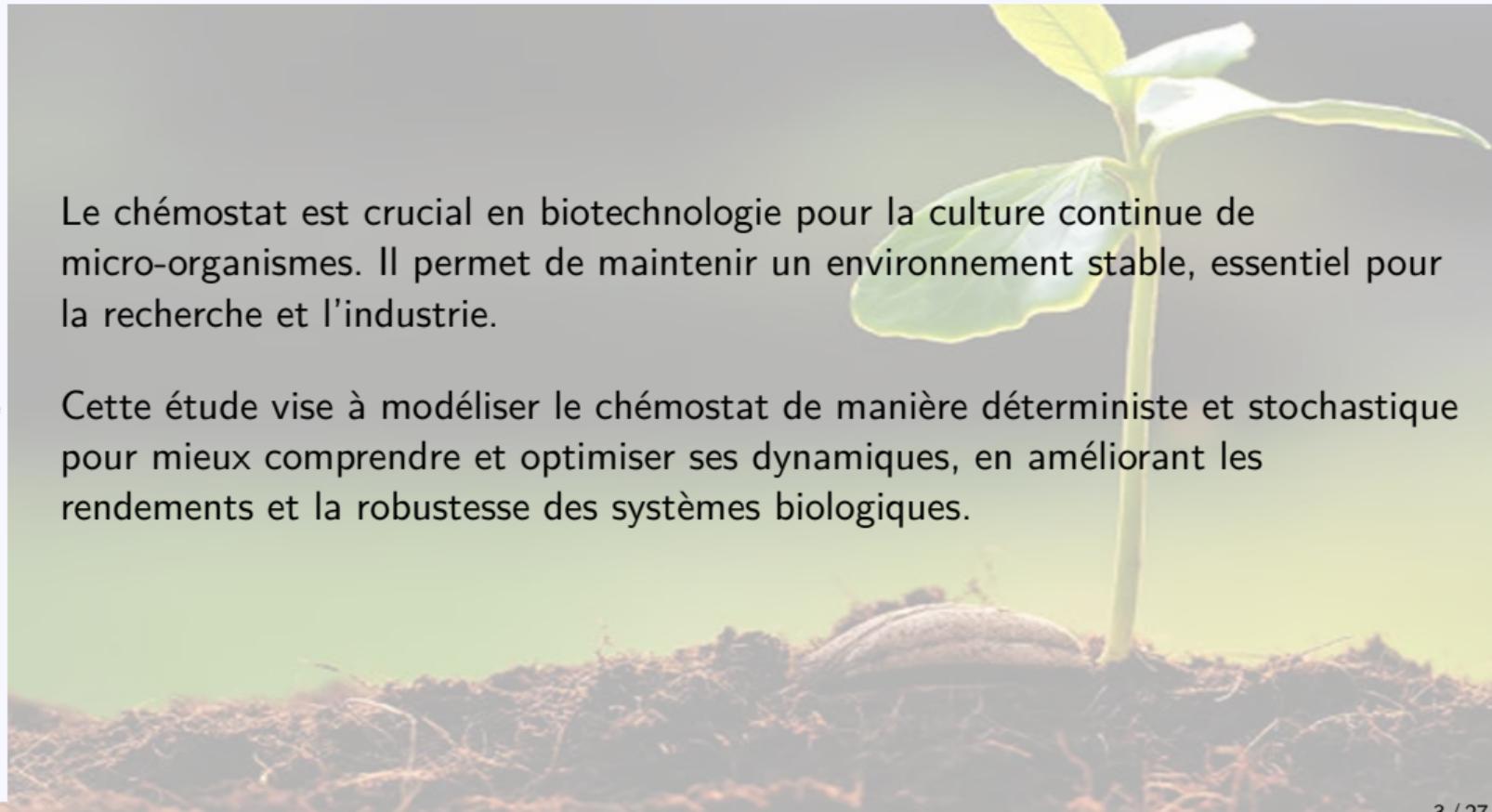
Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion

Le chémostat est crucial en biotechnologie pour la culture continue de micro-organismes. Il permet de maintenir un environnement stable, essentiel pour la recherche et l'industrie.

Cette étude vise à modéliser le chémostat de manière déterministe et stochastique pour mieux comprendre et optimiser ses dynamiques, en améliorant les rendements et la robustesse des systèmes biologiques.



Notations des variables

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

Première construction
du Modèle Stochastique
Simulation déterministe
et stochastique

Deuxième construction
du Modèle Stochastique
Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion

Symbol	Description	Unité
$s(t)$	Concentration du substrat (nutriment) à l'instant t	g/L ou mol/L
$x(t)$	Concentration de la biomasse (microorganismes) à l'instant t	g/L
F_{in}	Flux volumique d'entrée du réacteur	L/h
F_{out}	Flux volumique de sortie du réacteur	L/h
S_{in}	Concentration en substrat dans le flux entrant	g/L
X_{in}	Concentration en biomasse dans le flux entrant	g/L
$\mu(s)$	Taux de croissance spécifique en fonction du substrat s	h^{-1}
$V(t)$	Volume du mélange (de $s(t)$ et $x(t)$) dans le réacteur	L
$D = \frac{F_{in}}{V}$	Taux de dilution	h^{-1}

Équation du chémostat

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

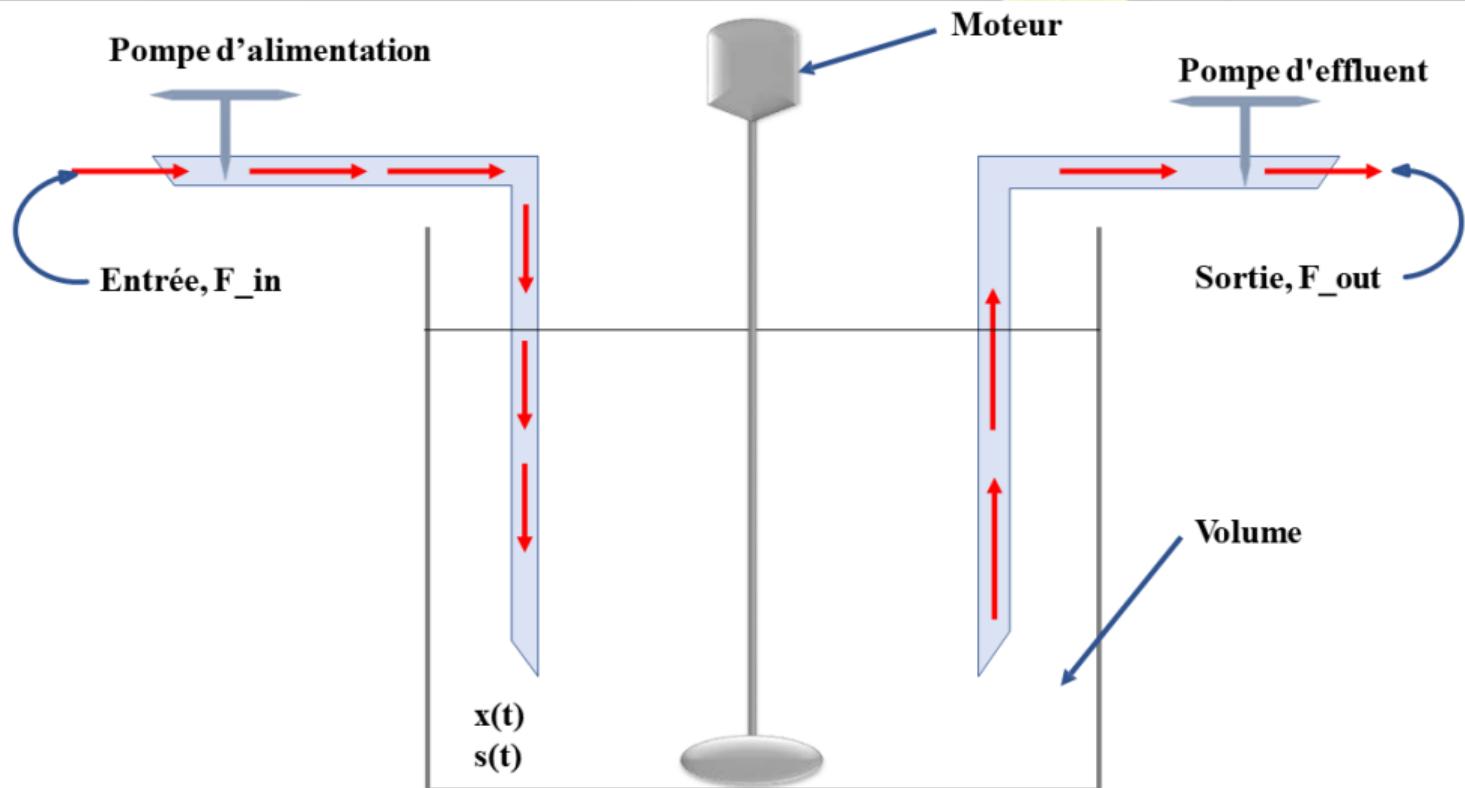
Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion



Existence et unicité de la solution positive

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion

◆ Dans le mode continu du chémostat, nous avons :

$$\begin{cases} \frac{ds(t)}{dt} = D(S_{in} - s(t)) - \mu(s(t))x(t), \\ \frac{dx(t)}{dt} = (\mu(s(t)) - D)x(t), \\ s(0) = s_0, x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

Théorème

Le système (1) admet une solution unique définie sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$. De plus, si les conditions initiales sont positives, c'est-à-dire $s(0) = s_0$ et $x(0) = x_0$ avec s_0 et x_0 positives, Alors, la solution $(s(t), x(t))$ reste positive pour tout $t \geq 0$. Aussi s et x borné.

Les équilibres du système

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

Première construction
du Modèle Stochastique
Simulation déterministe
et stochastique

Deuxième construction
du Modèle Stochastique
Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion

Dans la première partie, on suppose que le taux de croissance de la biomasse μ est strictement croissant. Plusieurs fonctions rencontrées dans la littérature satisfont cette hypothèse. La plus populaire est la fonction de Monod, donnée par :

$$\mu(s) = \frac{\mu_{\max} s}{K + s}$$

Si $\mu_{\max} < D$, on note $\lambda(D)$ l'unique solution de l'équation $\mu(\lambda(D)) = D$.

Proposition

- $E_0 = (S_{in}, 0)$ est un équilibre de lessivage, qui existe toujours.
- $E_1 = (S_{in} - \lambda(D), \lambda(D))$ est un équilibre avec une biomasse positive, qui existe seulement si $\lambda(D) < S_{in}$.

	E_0	E_1
$\lambda(D) > S_{in}$	localement stable	N'existe pas
$\lambda(D) < S_{in}$	Instable	localement stable

Les équilibres du système

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion

Dans cette seconde partie, on considère une fonction de croissance μ non strictement croissante, typiquement modélisée par la fonction de Haldane, qui croît jusqu'à un maximum s_m puis décroît. Elle s'écrit :

$$\mu(s) = \frac{\mu_{\max}s}{K + s + \frac{s^2}{K_I}}.$$

Lorsque $0 < D < \mu_{\max}$, l'équation $\mu(s) = D$ admet en général deux solutions positives $\lambda(D)$ et $\theta(D)$, telles que :

$$\mu(\lambda(D)) = \mu(\theta(D)) = D.$$

Les équilibres du système

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion

Proposition

- $E_0 = (S_{in}, 0)$ est un équilibre de lessivage, qui existe toujours.
- $E_1 = (S_{in} - \lambda(D), \lambda(D))$ est un équilibre avec une biomasse positive, qui existe seulement si $\lambda(D) < S_{in}$.
- $E_2 = (S_{in} - \theta(D), \theta(D))$ est un équilibre avec une biomasse positive, qui existe seulement si $\theta(D) < S_{in}$.

	$\lambda(D) > S_{in}$	$\lambda(D) < S_{in} < \theta(D)$	$\theta(D) < S_{in}$
E_0	Localement stable	Instable	Localement stable
E_1	N'existe pas	Localement stable	Localement stable
E_2	N'existe pas	N'existe pas	Instable

Les équilibres et leur nature dans le cas où μ est de type **Haldane**.

Extinction de la biomasse

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

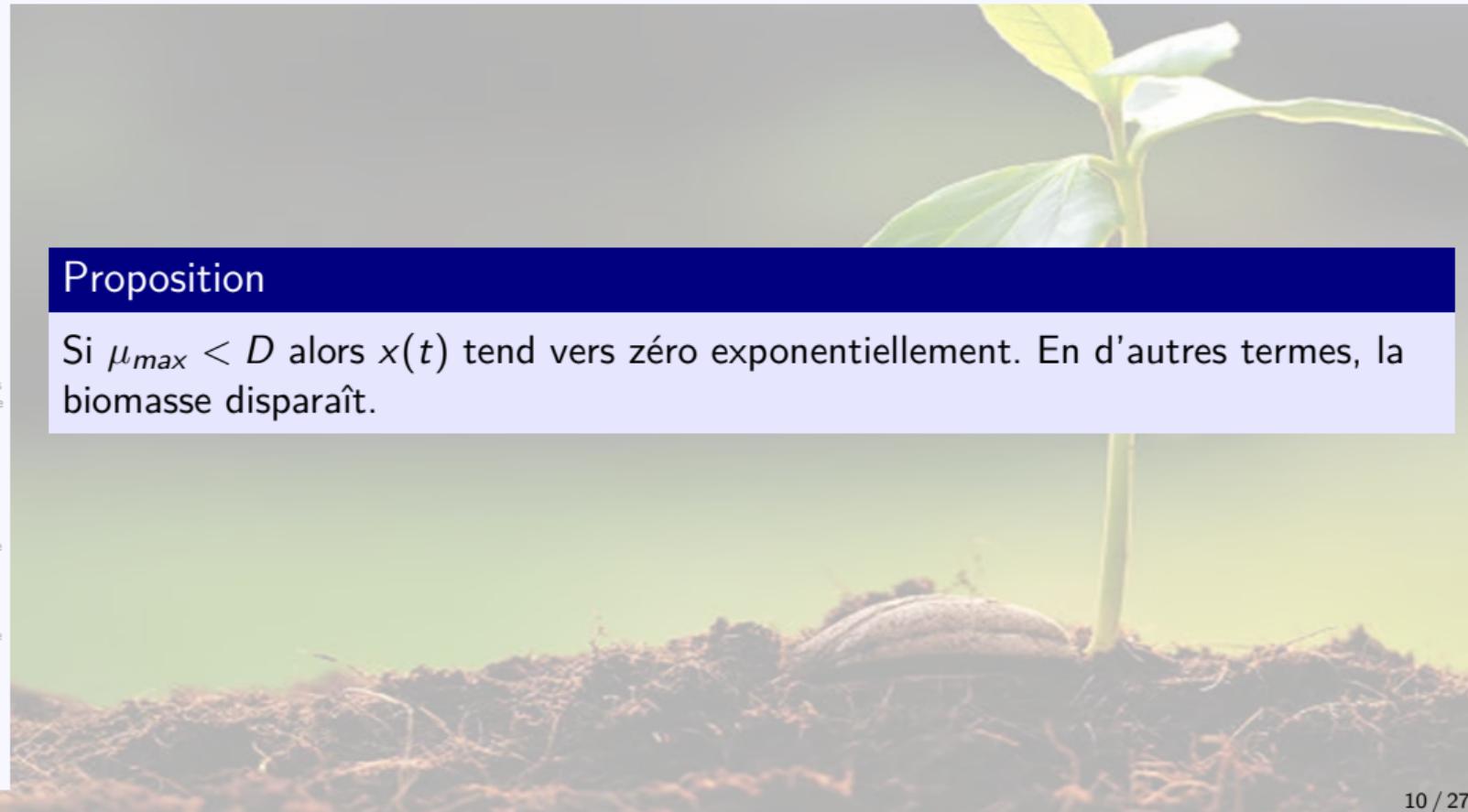
Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion

Proposition

Si $\mu_{max} < D$ alors $x(t)$ tend vers zéro exponentiellement. En d'autres termes, la biomasse disparaît.



Diagrammes opératoires

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

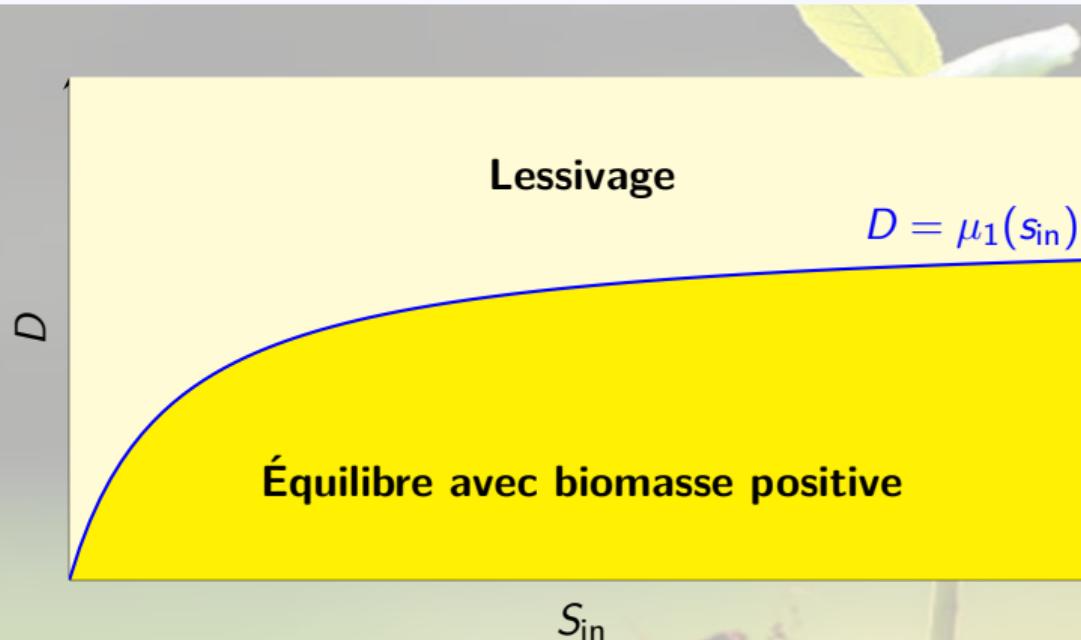
Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion



Diagrammes opératoires

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

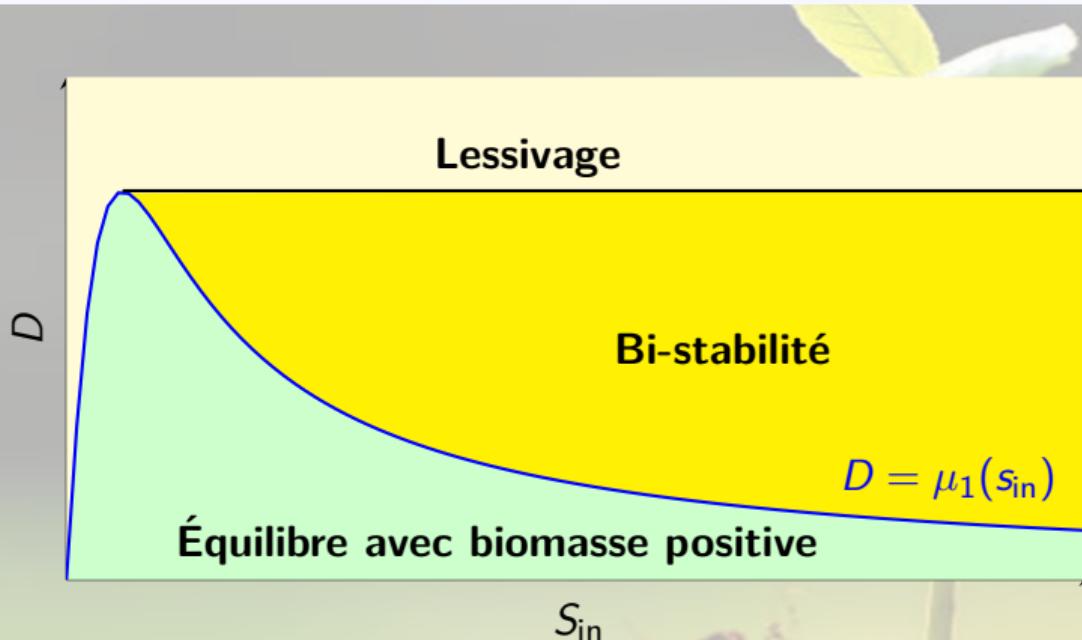
Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion



Le diagramme opératoires du système ou μ fonction de "Haldane".

Présence de biomasse dans l'alimentation

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion

$$\begin{cases} \frac{ds(t)}{dt} = D(S_{in} - s(t)) - \mu(s(t))x(t), \\ \frac{dx(t)}{dt} = D(X_{in} - x(t)) + \mu(s(t))x(t), \\ s(0) = s_0 \text{ et } x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2)$$

Proposition

Le système (2) admet une solution unique définie sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$. De plus, si les conditions initiales sont positives, c'est-à-dire $s(0) = s_0$ et $x(0) = x_0$ avec s_0 et x_0 positives, alors les solutions restent positives pour tout $t \geq 0$.

Proposition

Le point $E = (s^*, x^*)$ est un équilibre localement stable pour le système (2). c'est l'équilibre avec la biomasse positive.

Première présentation du modèle stochastique

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

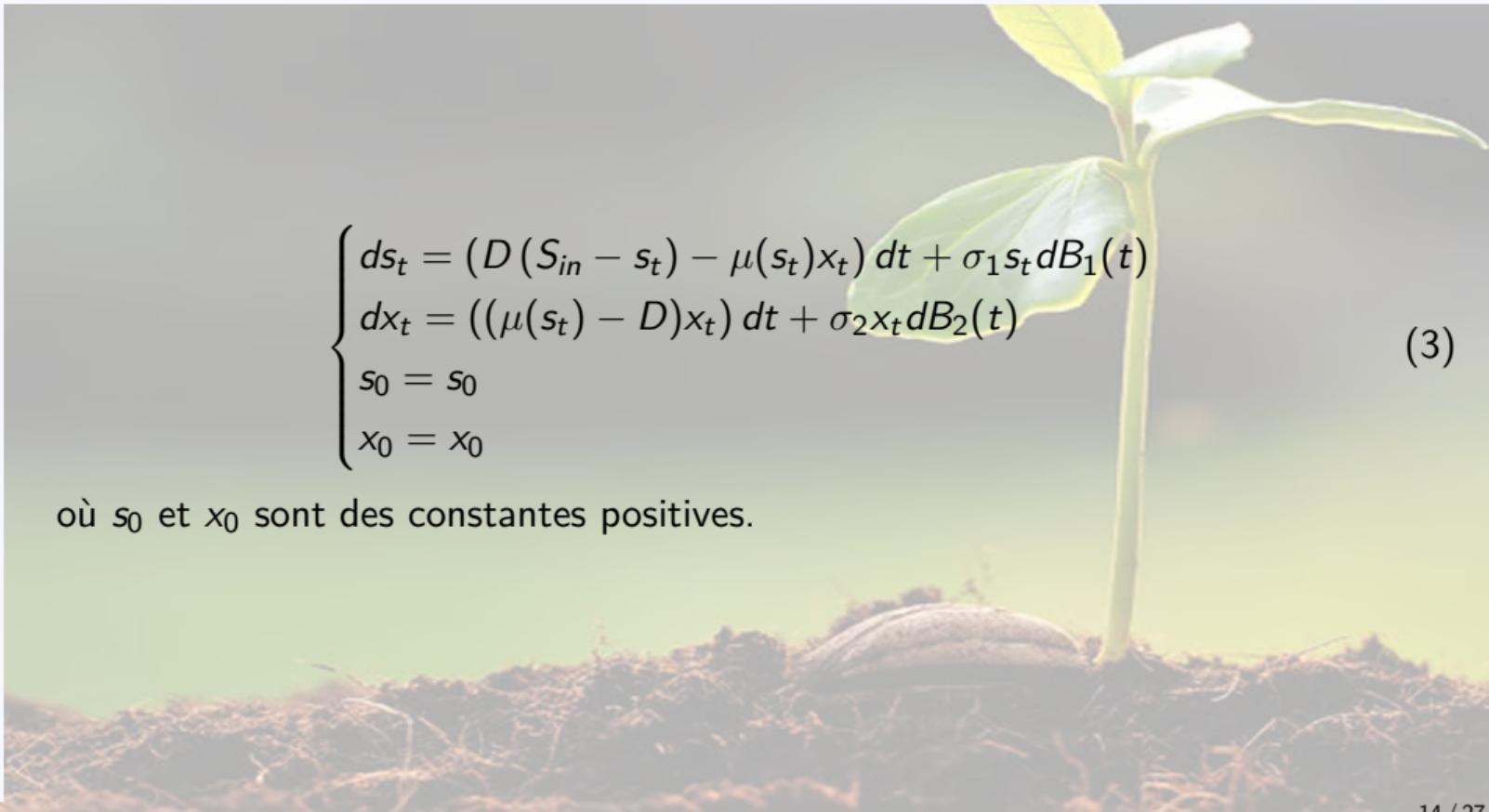
Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion

$$\begin{cases} ds_t = (D(S_{in} - s_t) - \mu(s_t)x_t) dt + \sigma_1 s_t dB_1(t) \\ dx_t = ((\mu(s_t) - D)x_t) dt + \sigma_2 x_t dB_2(t) \\ s_0 = s_0 \\ x_0 = x_0 \end{cases} \quad (3)$$

où s_0 et x_0 sont des constantes positives.



Existence et unicité de la solution positive

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion

Théorème :

Pour tout $(s_0, x_0) \in \mathbb{R}_+^2$, il existe une unique solution (s_t, x_t) de système (3) définie pour tout $t \geq 0$ presque sûrement, et la solution reste dans \mathbb{R}_+^2 (i.e. $(s_t, x_t) \in \mathbb{R}_+^2 \ \forall t \geq 0 \ \mathbb{P} - p.s.$)

Extinction de la biomasse :

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion

Soit $\tilde{D} = D + \frac{1}{2}\sigma_2^2$.

Théorème

Si : $\tilde{D} > \mu_{max}$.

Alors pour toute valeur initiale donnée $(s_0, x_0) \in \mathbb{R}_+^2$, la solution (s_t, x_t) du système (3) satisfait

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log(x_t) < 0 \text{ p.s.},$$

ce qui signifie que x_t tend à zéro exponentiellement presque sûrement. En d'autres termes, les micro-organismes disparaissent avec une probabilité égale à un.

Distribution stationnaire

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion

Définissons une fonction continue $G : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$G(s) = -(D - \sigma_1 \tilde{D}K)(s - S_{in})^2 + \sigma_1(\tilde{D} - m + 2\tilde{D}S_{in})(s - S_{in}) - \sigma_1(mS_{in} - \tilde{D}(a + S_{in} + KS_{in}^2))$$

Théorème

Si σ_1 et σ_2 satisfont :

$$\sigma_1 < G_0, \quad \sigma_1^2 < \frac{-2C}{S_{in}} \wedge D, \quad (4)$$

$$\tilde{D} < \frac{mS_{in}}{a + S_{in} + KS_{in}^2}, \quad \sigma_2^2 < 2D, \quad (5)$$

où $C = \sup_{s \in (0, \infty)} \frac{G(s)}{a + s + Ks^2} < 0$, $G_0 = \frac{D}{\tilde{D}K} \wedge \frac{4D[mS_{in} - \tilde{D}(a + S_{in} + KS_{in}^2)]}{(\tilde{D} - m + 2K\tilde{D}S_{in})^2 + 4K\tilde{D}[mS_{in} - \tilde{D}(a + S_{in} + KS_{in}^2)]}$,

alors pour toute valeur initiale $(s_0, x_0) \in \mathbb{R}_+^2$, il existe une distribution stationnaire $\mu(\cdot)$ pour le système (3)

Simulation déterministe et stochastique du premier modèle

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

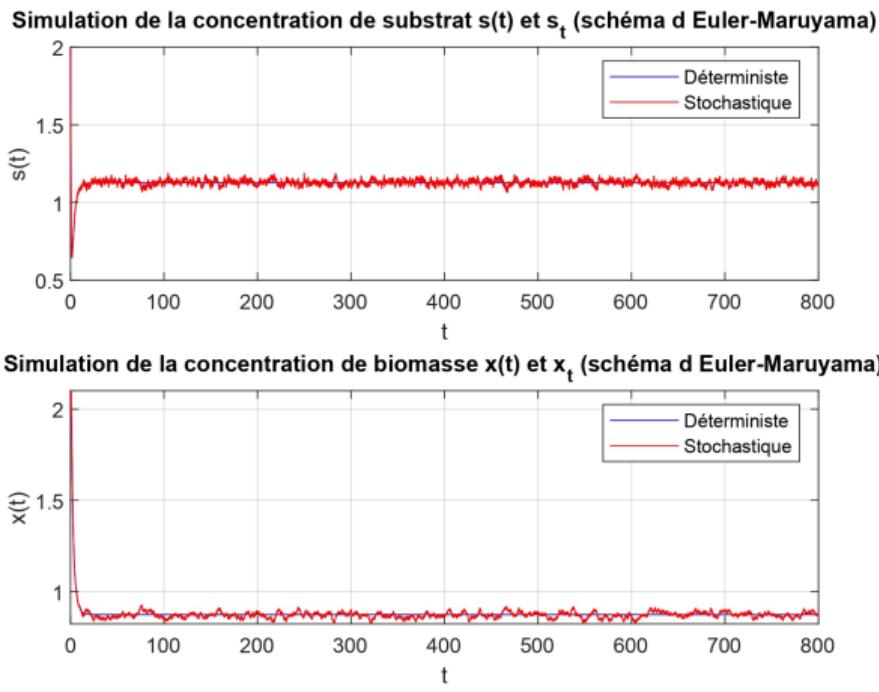
Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion



Solutions numériques pour le système (3) et le système déterministe correspondant (1) avec les paramètres principal $D = 1$, $\sigma_1 = 0.02$, et $\sigma_2 = 0.01$.

Simulation déterministe et stochastique du premier modèle

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion

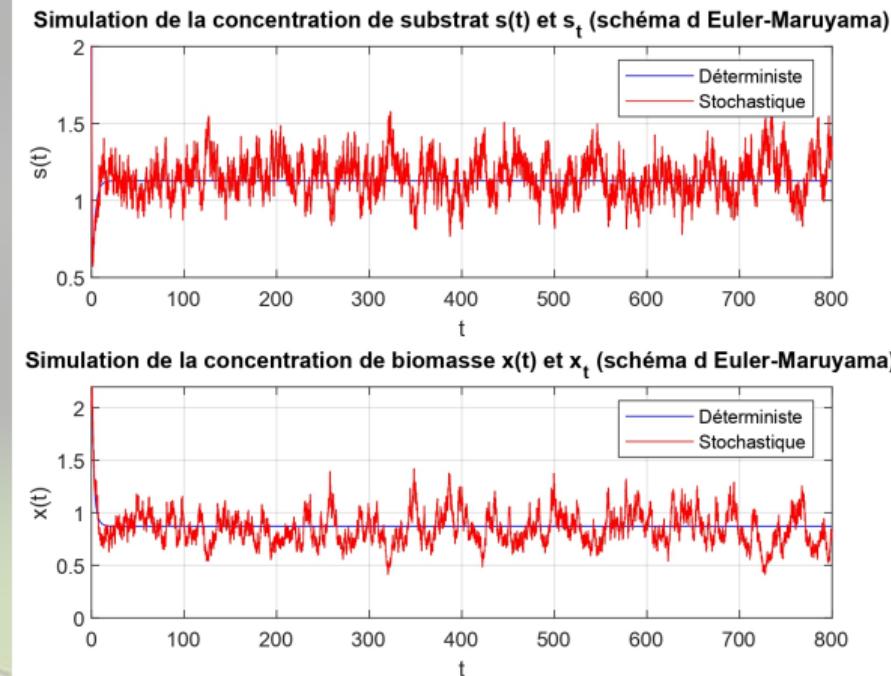


Figure – Solutions numériques pour le système (3) et le système déterministe correspondant (1) avec les paramètres principal $D = 1$ et $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.1$.

Simulation déterministe et stochastique du premier modèle

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion

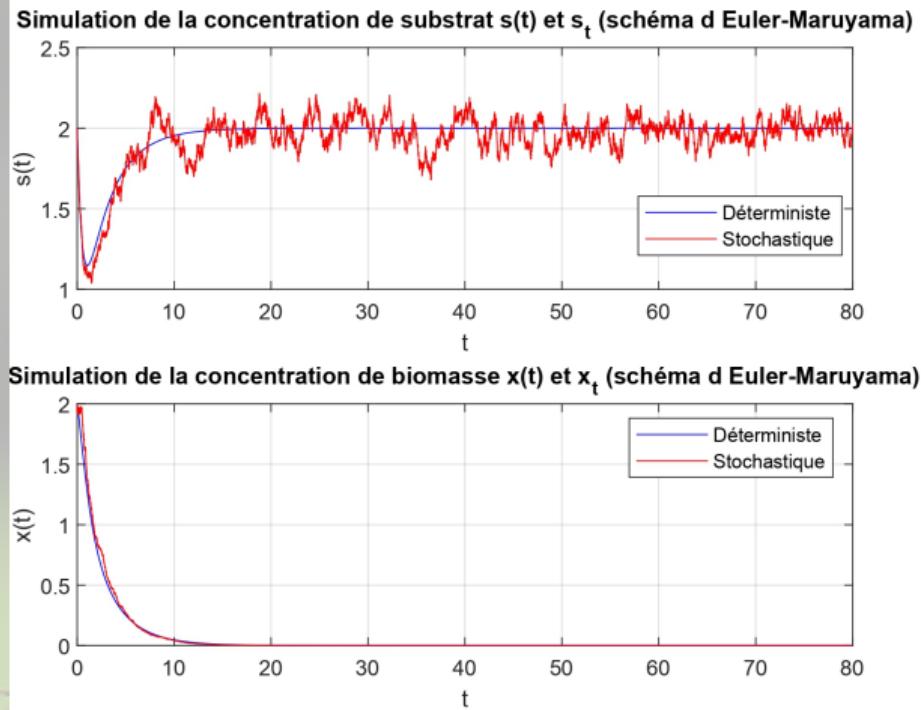


Figure – Solutions numériques pour le système (3) et le système déterministe correspondant (1) avec les paramètres principal $D = 1.5$, $\sigma_1 = 0.08$, et $\sigma_2 = 0.08$.

Simulation déterministe et stochastique du premier modèle

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion

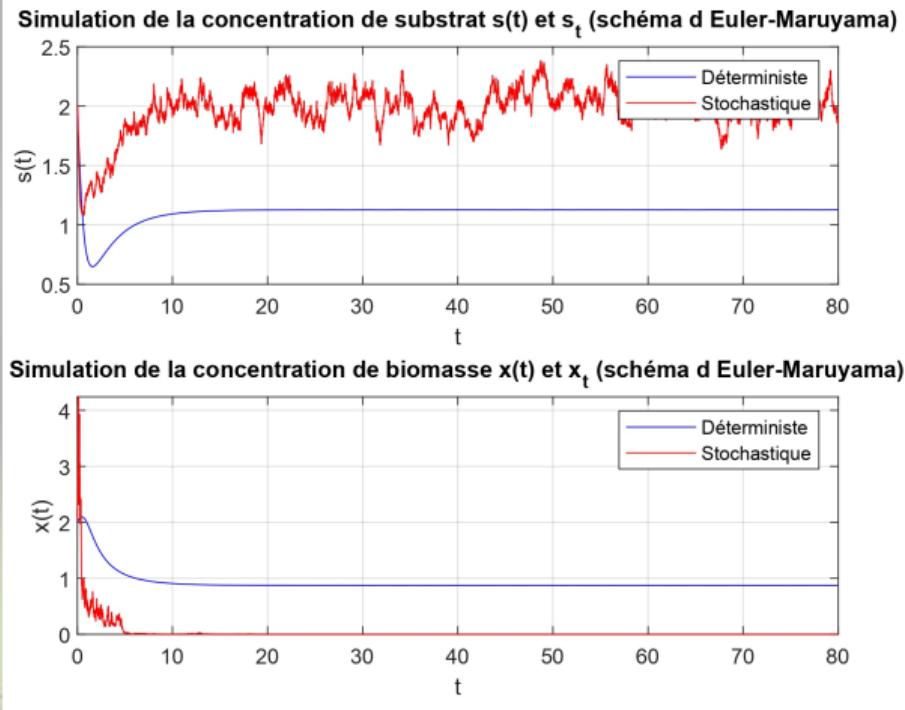


Figure – Solutions numériques pour le système (3) et le système déterministe correspondant (1) avec les paramètres principal $D = 1$, $\sigma_1 = 0.2$, et $\sigma_2 = 1.1$.

Deuxième présentation du modèle stochastique

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion

En particulier, nous modélisons la dilution D comme une quantité fluctuante autour d'une valeur moyenne D_0 avec une composante stochastique :

$$D = D_0 + \sigma \xi$$

où $\xi dt = dB(t)$ et σ est un paramètre qui mesure l'intensité du bruit.

$$\begin{cases} ds_t = (D_0 (S_{in} - s_t) - \mu(s_t)x_t) dt + \sigma (S_{in} - s_t) dB(t) \\ dx_t = (\mu(s_t) - D_0)x_t dt - \sigma x_t dB(t) \\ s_0 = s_0 \\ x_0 = x_0 \end{cases} \quad (6)$$

Théorème : Existence et unicité de la solution

Pour tout $(s_0, x_0) \in \mathbb{R}_+^2$, il existe une unique solution (s_t, x_t) de système (6) définie pour tout $t \geq 0$ presque sûrement.

Simulation déterministe et stochastique du deuxième modèle

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

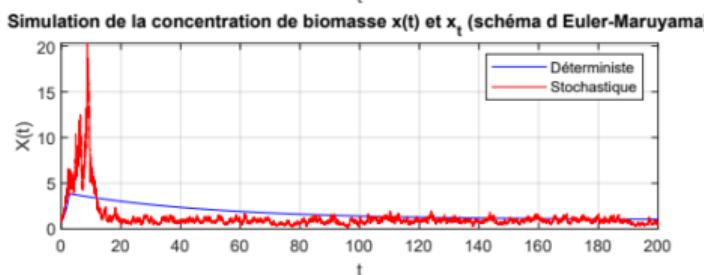
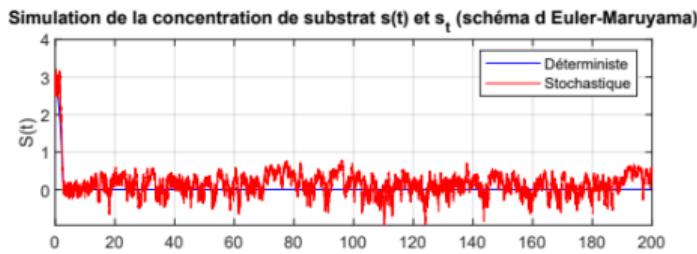
Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

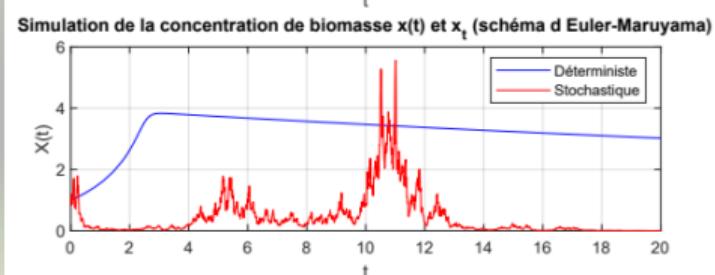
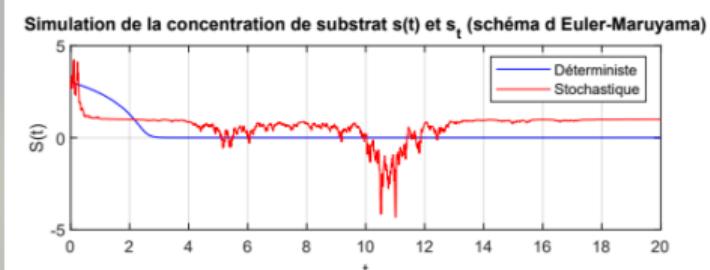
Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion



$$\sigma = 0.5.$$



$$\sigma = 1.5.$$

Solutions numériques pour le système (6) et le système déterministe correspondant (1) avec les paramètres principal $D = D_0 = 0.002$, $s_0 = 3.02$ et $x_0 = 1$.

Simulation déterministe et stochastique du deuxième modèle

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

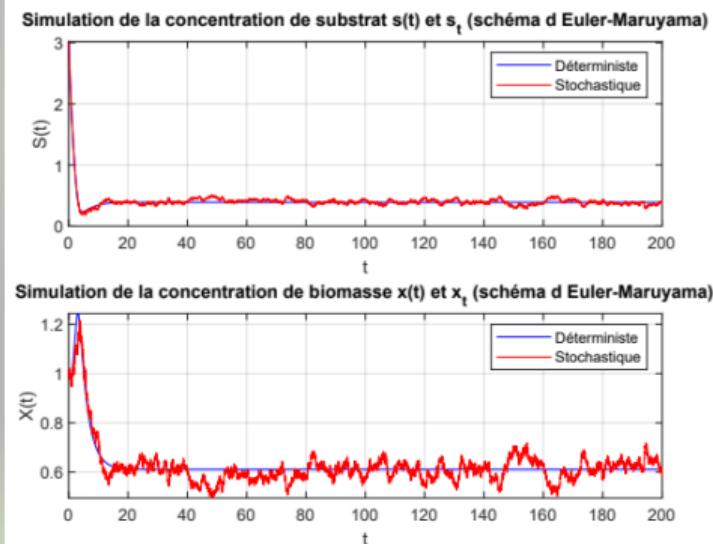
Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

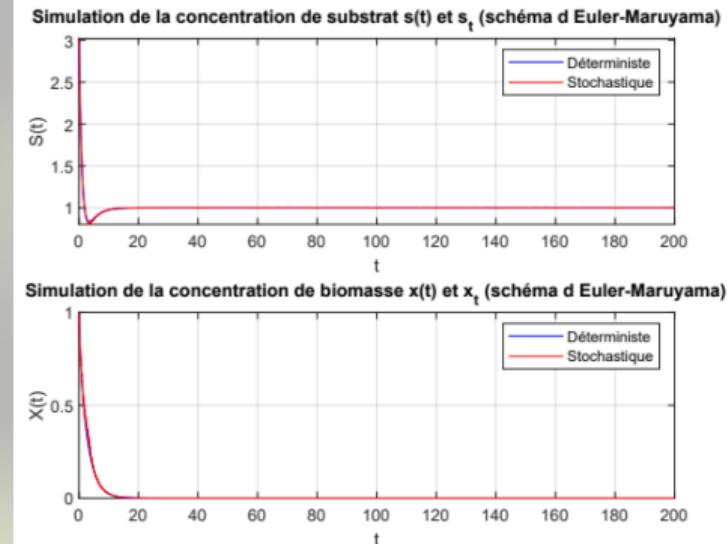
Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion



$$D = D_0 = 0.5 \text{ et } \sigma = 0.05.$$



$$D = D_0 = 1 \text{ et } \sigma = 0.05.$$

Solutions numériques pour le système (6) et le système déterministe correspondant (1) avec $s_0 = 3.02$ et $x_0 = 1$.

Simulation déterministe et stochastique du deuxième modèle

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

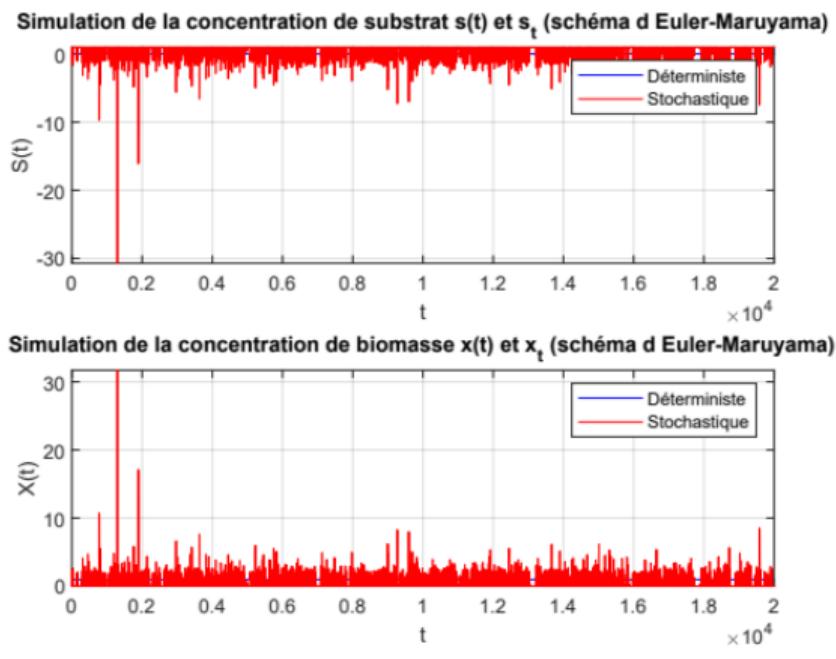
Première construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion



Solutions numériques pour le système (6) et le système déterministe correspondant (1)
avec les paramètres principal $D = D_0 = 0.02$ et $\sigma = 1.5$.

Conclusion

IMAME'2025

Mohamed Najib
Laatabi

Introduction

Modèle du
Chémostat
Déterministe

Propriétés
mathématiques du
modèle

Diagrammes opératoires
et Présence de biomasse

Modèle du
Chémostat
Stochastique

Première construction
du Modèle Stochastique

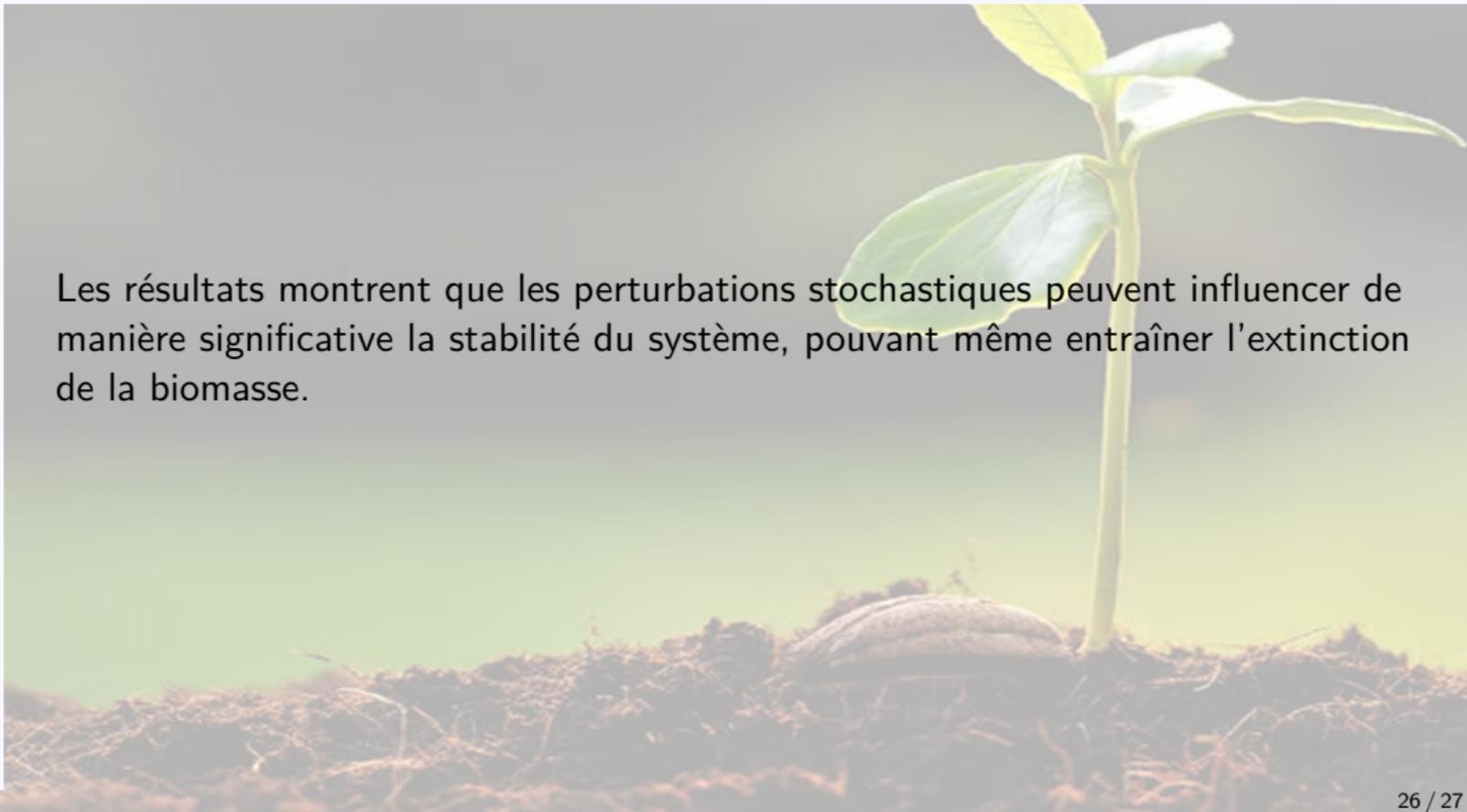
Simulation déterministe
et stochastique

Deuxième construction
du Modèle Stochastique

Simulation déterministe
et stochastique

Conclusion

Les résultats montrent que les perturbations stochastiques peuvent influencer de manière significative la stabilité du système, pouvant même entraîner l'extinction de la biomasse.





Merci pour votre attention