UM5 Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année 2026/2027
Filière $\mathcal{MI}$ $\mathcal{S}_1$
Module : Algèbre I

Série 1 : Logique, Raisonnements & Ensembles

Négations et quantificateurs, • Contraposée, • Récurrence, • Opérations ensemblistes, • Partitions

Exercice 1 — Négations et valeurs de vérité

Donner la négation de chacune des propositions suivantes, et préciser sa valeur de vérité si elle ne dépend pas du contexte :

1) Pour tout réel $a > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < a$.
2) Tous ces stylos sont bleus.
3) Pour tous $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si $a \mid bc$, alors $a \mid b$ ou $a \mid c$.
4) Soient les ensembles

$$A = \{5n + 7 \mid n \in \mathbb{Z}\}, \qquad B = \{5n + 32 \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

   Alors $A \neq B$.
5) Il existe un ensemble A contenu dans $\mathbb{Z}$ tel que A ne contient pas de multiple de 7.
6) Il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que : $a^2 - b^2 = 1$.
7) Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, $D_a = D_b \Rightarrow a = b$.
8) Etant donné quatre sous ensembles de $\mathbb{R}$, au plus deux d'entre eux ont une intersection vide.

Exercice 2 — Calcul propositionnel et tables de vérité

Soient A, B et C des propositions.

1) Donner la table de vérité de A «ou exclusif» B.
2) Cours. Montrer que $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ et $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
3) Simplifier l'expression suivante :

$$[\neg(A \wedge B)] \wedge \big((A \vee C) \wedge \neg C\big).$$

Exercice 3 — Raisonnement par contraposée

Montrer par contraposée les propositions suivantes :

1) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. $a^2(b^2 - ab)$ impair $\Rightarrow$ a et b sont impairs.
2) Soit n un entier naturel tel que le reste de la division euclidienne de n par 3 est égal à 2. Alors n n'est pas un carré.

Exercice 4 — Raisonnement par récurrence

Montrer par récurrence les propositions suivantes :

1) Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1!\,3!\,\ldots\,(2n+1)! \geq [(n+1)!]^{n+1}$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 8 divise $3^{2n}+7$.

Exercice 5 — Opérations ensemblistes

Soient E et F deux ensembles non vides.

1) Cours. En utilisant les tables d'appartenance, montrer que la différence symétrique est associative dans $\mathcal{P}(E)$.
2) Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$. Résoudre l'équation $A\Delta X = \varnothing$. Ensuite montrer que l'équation $A\Delta X = B$ admet une solution unique.
3) Soient A, C deux parties non vides de E et B et D deux parties non vides de F. Avez vous les relations suivantes ?
$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D),$$
$$(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D).$$
4) Donner les ensembles suivants
$$(D_{777} \cap D_{3800}) \cap D_{33},$$
$$(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}) \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-).$$

Exercice 6 — Partitions

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons
$$A_k = \{ns + k \mid s \in \mathbb{N}\}, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq k < n.$$
Les ensembles A_k forment-ils une partition de $\mathbb{N}$?
2) Soit A un ensemble non vide. Soient $B_0, \ldots, B_n$ des sous-ensembles de A tels que
$$\varnothing = B_0 \subsetneqq B_1 \subsetneqq B_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq B_n = A.$$
Posons $D_j = B_j \setminus B_{j-1}$, pour $j \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que $(D_j)_{1 \leq j \leq n}$ forme une partition de A.
3) Donner une partition de $\mathbb{R}$ formée de 4 ensembles, et une partition de $\mathbb{C}$ formée de 3 ensembles.
4) [Facultatif] Soient A et B deux ensembles non vides, et soient $(D_j)_{j \in I}$ une partition de A et $(F_j)_{j \in J}$ une partition de B. La famille $(D_j \times F_k)_{(j,k) \in I \times J}$ forme-t-elle une partition de $A \times B$?

Exercice 7 — Logique, implications et ensembles

[Facultatif]

1) Montrer que l'implication est transitive en utilisant les tables de vérité (N. B : La méthode directe a été traitée dans le cours) : Si P, Q et R sont 3 propositions, alors
$$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R).$$
2) Simplifier les expressions logiques suivantes :
$$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R), \qquad (P \vee (Q \wedge R)) \wedge (\neg P \vee Q), \qquad \text{et}$$
$$((P \vee Q) \Rightarrow R) \wedge (\neg R \vee P).$$

3) Dans chaque cas, voir si les propositions P et Q sont équivalentes

$$P : \forall m \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n > m^2 + 1,$$
$$Q : \exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ n > m^2 + 1.$$

Soient A, B et C des propositions

$$P : (A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow B), \qquad Q : (A \wedge C) \Rightarrow B.$$

4) Dans chaque cas, voir si les ensembles A et B sont égaux

$$A = \{8n + 12 \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{8n + 4 \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
$$A = \{8n + 12 \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{8n - 4 \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Document rédigé par Mohamed Najib LAATABI — UM5 Rabat, Faculté des Sciences
Email : najib.laatabi@um5r.ac.ma