Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

𝕌𝕄5 ℛabat
ℱaculté des 𝒮ciences
𝒟épartement de ℳathématiques

𝒜nnée **2026/2027**
ℱilière $\mathcal{MI}$ $\mathcal{S}_1$
ℳodule : 𝒜lgèbre **I**

Corrigé de la Série 1 : Logique, Raisonnements & Ensembles

Négations et quantificateurs, • Contraposée, • Récurrence, • Opérations ensemblistes, • Partitions

Exercice 1 — Négations et valeurs de vérité

Pour chacune des propositions suivantes, on donne sa négation et on détermine sa valeur de vérité.

1) Propriété d'Archimède

Proposition

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad a > 0 \implies \left(\exists n \in \mathbb{N}^*,\ \tfrac{1}{n} < a\right).$$

Négation

$$\exists a \in \mathbb{R}, \quad a > 0 \ \wedge \ \left(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \tfrac{1}{n} \geq a\right).$$

Verdict

La proposition est **Vraie**. C'est une forme de la *propriété d'Archimède* : aucun réel strictement positif n'est plus petit que tous les inverses d'entiers. La négation est donc **Fausse**.

2) Quantification universelle sur un ensemble fini

Soit S l'ensemble de « ces stylos » et $B(x)$ le prédicat « x est bleu ».

Proposition

$$\forall x \in S, \quad B(x).$$

Négation

$$\exists x \in S, \quad \neg B(x),$$

c'est-à-dire : *il existe au moins un de ces stylos qui n'est pas bleu.*

Verdict

La valeur de vérité **dépend du contexte** (de l'ensemble S réel). On ne peut conclure ni « vrai » ni « faux » sans information supplémentaire.

3) Divisibilité d'un produit

Proposition

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad (a \mid bc) \implies (a \mid b \ \vee \ a \mid c).$$

Négation

$$\exists a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad (a \mid bc) \ \wedge \ (a \nmid b) \ \wedge \ (a \nmid c).$$

Verdict

La proposition est **Fausse**. Contre-exemple : $a = 6$, $b = 2$, $c = 3$. On a $bc = 6$ donc $6 \mid 6$, mais $6 \nmid 2$ et $6 \nmid 3$. (La propriété serait vraie si a était premier : c'est le lemme d'Euclide.)

4) Égalité de deux ensembles d'entiers

On considère, dans $\mathbb{Z}$,

$$A = \{5n + 32 \mid n \in \mathbb{Z}\}, \qquad B = \{5n + 7 \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Proposition

$$A \neq B.$$

Négation

$$A = B.$$

Verdict

La proposition est **Fausse** : on a $A = B$. En effet

$$5n + 32 = 5(n + 5) + 7,$$

donc $A \subset B$. Réciproquement, $5n + 7 = 5(n - 5) + 32$, donc $B \subset A$, les deux ensembles coïncident.

5) Existence d'une partie sans multiple de 7

Proposition

$$\exists A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \quad \forall x \in A, \ 7 \nmid x.$$

Négation

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \quad \exists x \in A, \ 7 \mid x.$$

Verdict

La proposition est **Vraie** : il suffit de prendre $A = \{1\}$. La négation est **Fausse** : elle affirmerait que *tout* sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ contient un multiple de 7.

6) Différence de deux carrés

Proposition

$$\exists a, b \in \mathbb{N}, \quad a^2 - b^2 = 1.$$

Négation

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad a^2 - b^2 \neq 1.$$

Verdict

La proposition est **Vraie** : $a = 1, b = 0$ convient ($1^2 - 0^2 = 1$), en prenant $0 \in \mathbb{N}$. De plus, $(a-b)(a+b) = 1$ avec $a + b \geq a - b \geq 1$ force $a - b = a + b = 1$: c'est la seule solution dans $\mathbb{N}$.

7) Ensembles de diviseurs

Notons D_a l'ensemble des diviseurs de a dans $\mathbb{Z}$.

Proposition

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad D_a = D_b \implies a = b.$$

Négation

$$\exists a, b \in \mathbb{Z}, \quad D_a = D_b \ \wedge \ a \neq b.$$

Verdict

La proposition est **Fausse**. Contre-exemple : $a = 2, b = -2$. On a $D_2 = D_{-2} = \{-2, -1, 1, 2\}$ mais $2 \neq -2$. Plus généralement $D_a = D_{-a}$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$.

8) Intersections de quatre ensembles

On considère quatre ensembles A_1, A_2, A_3, A_4. Les six intersections deux à deux sont

$$A_1 \cap A_2, \ A_1 \cap A_3, \ A_1 \cap A_4, \ A_2 \cap A_3, \ A_2 \cap A_4, \ A_3 \cap A_4.$$

Proposition

Parmi ces six intersections, *au plus deux* sont vides :

$$\operatorname{card}\{\, \{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\} : A_i \cap A_j = \varnothing \,\} \leq 2.$$

Négation

Parmi ces quatre ensembles, *au moins trois paires* ont une intersection vide :

$$\operatorname{card}\{\, \{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\} : A_i \cap A_j = \varnothing \,\} \geq 3.$$

Verdict

La proposition est **Fausse**. Contre-exemple : les singletons disjoints

$$A_1 = \{1\}, \quad A_2 = \{2\}, \quad A_3 = \{3\}, \quad A_4 = \{4\}.$$

Les six intersections deux à deux sont vides :

$$A_1 \cap A_2 = \varnothing, \quad A_1 \cap A_3 = \varnothing, \quad A_1 \cap A_4 = \varnothing,$$
$$A_2 \cap A_3 = \varnothing, \quad A_2 \cap A_4 = \varnothing, \quad A_3 \cap A_4 = \varnothing.$$

Il y a $\binom{4}{2} = 6$ paires, toutes disjointes. Le cardinal vaut 6, qui n'est pas inférieur ou égal à 2. La négation est donc **Vraie**.

Exercice 2 — Calcul propositionnel et tables de vérité

Dans toutes les tables ci-dessous, 1 signifie « vrai » et 0 signifie « faux ».

1) Table de vérité de $A \oplus B$ (disjonction exclusive)

$$A \oplus B \equiv (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B).$$

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$A \oplus B$ est vraie *exactement* lorsqu'une et une seule des deux propositions l'est.

2) Distributivité de $\wedge$ sur $\vee$

$$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Les deux colonnes dorées coïncident. Donc

$$\boxed{A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C).}$$

3) Distributivité de $\vee$ sur $\wedge$

$$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Les deux colonnes dorées coïncident. Donc

$$\boxed{A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)}.$$

4) Simplification d'une expression logique

On simplifie à l'aide d'équivalences logiques.

$$\begin{aligned}
\neg(A \wedge B) \wedge ((A \vee C) \wedge \neg C) &\iff (\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee C) \wedge \neg C \quad \text{(De Morgan)} \\
&\iff (\neg A \vee \neg B) \wedge A \wedge \neg C \quad (\text{car } (A \vee C) \wedge \neg C \equiv A \wedge \neg C) \\
&\iff ((\neg A \wedge A) \vee (\neg B \wedge A)) \wedge \neg C \quad \text{(distributivité)} \\
&\iff (0 \vee (A \wedge \neg B)) \wedge \neg C \\
&\iff A \wedge \neg B \wedge \neg C.
\end{aligned}$$

Exercice 3 — Raisonnement par contraposée

1) Parité de $a^2(b^2 - ab)$

Contraposée

$$(a \text{ pair} \quad \vee \quad b \text{ pair}) \implies a^2(b^2 - ab) \text{ pair}.$$

Preuve

Par disjonction des caes :

- Si $a = 2k$, alors
$$a^2(b^2 - ab) = 4k^2(b^2 - ab) = 2(2k^2(b^2 - ab)),$$
qui est pair.
- Si a impair, alors $b = 2k$ (b paire) et
$$b^2 - ab = 4k^2 - 2ka = 2k(2k - a),$$
qui est pair. Le produit $a^2(b^2 - ab)$ est donc pair.

La contraposée est **Vraie**, et l'implication d'origine l'est aussi.

2) Carrés Parfait

Contraposée

Si n est le carré d'un entier naturel, alors le reste de la division de n par 3 *ne peut pas* être égal à 2.

Preuve

Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = m^2$. Tout entier m s'écrit

$$m = 3q, \qquad m = 3q + 1 \qquad \text{ou} \qquad m = 3q + 2,$$

avec $q \in \mathbb{N}$.

- Si $m = 3q$, alors $m^2 = 9q^2 = 3(3q^2)$.
Reste 0.
- Si $m = 3q + 1$, alors
$$m^2 = (3q + 1)^2 = 9q^2 + 6q + 1 = 3(3q^2 + 2q) + 1.$$
Reste 1.

- Si $m = 3q + 2$, alors

$$m^2 = (3q+2)^2 = 9q^2 + 12q + 4 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 1.$$

  Reste 1.

La division euclidienne du carré d'un entier naturel par 3 donne toujours un reste égal à 0 ou 1. La contraposée est **Vraie**.

Exercice 4 — Raisonnement par récurrence

1) Somme des carrés

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Notons P_n cette égalité.

Initialisation. Pour $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6} = 0.$$

P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n soit vraie. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2, \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2, \\
&= \frac{n+1}{6}\Big(n(2n+1) + 6(n+1)\Big), \\
&= \frac{n+1}{6}(2n^2 + n + 6n + 6), \\
&= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6), \\
&= \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3).
\end{aligned}$$

Car $2n^2 + 7n + 6 = (2n+3)(n+2)$. Or

$$\frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Une inégalité sur les produits de factorielles

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1!\,3!\,5! \cdots (2n+1)! \;\geq\; \big[(n+1)!\big]^{n+1}.$$

Notons

$$P_n : \qquad \prod_{k=0}^{n} (2k+1)! \;\geq\; \big[(n+1)!\big]^{n+1}.$$

Initialisation. Pour $n = 1$:

$$1!\,3! = 6, \qquad [(1+1)!]^{1+1} = (2!)^2 = 4.$$

On a $6 \geq 4$, donc P_1 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P_n soit vraie. Alors

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)! &= \left(\prod_{k=0}^{n}(2k+1)!\right)(2n+3)!,\\ &\geq [(n+1)!]^{n+1}\,(2n+3)!.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}(2n+3)! &= (n+1)!\,(n+2)(n+3)\cdots(2n+3)\\ &\geq (n+1)!\,(n+2)^{n+2},\end{aligned}$$

car le produit $(n+2)\cdots(2n+3)$ contient $n+2$ facteurs, tous supérieurs ou égaux à $n+2$. D'où

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)! &\geq [(n+1)!]^{n+1}\,(n+1)!\,(n+2)^{n+2}\\ &= [(n+1)!]^{n+2}\,(n+2)^{n+2},\\ &= [(n+1)!\,(n+2)]^{n+2},\\ &= [(n+2)!]^{n+2}.\end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Divisibilité par 8

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$8 \mid (3^{2n}+7).$$

Notons P_n la propriété « 8 divise $3^{2n}+7$ ».

Initialisation. Pour $n = 1$:

$$3^2 + 7 = 8 \times 2.$$

P_1 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P_n soit vraie : il existe $q \in \mathbb{Z}$ avec $3^{2n}+7 = 8q$. Alors

$$\begin{aligned}3^{2(n+1)} + 7 &= 3^{2n+2} + 7,\\ &= 9 \cdot 3^{2n} + 7,\\ &= (3^{2n}+7) + 8 \cdot 3^{2n},\\ &= 8q + 8 \cdot 3^{2n},\\ &= 8(q + 3^{2n}).\end{aligned}$$

Comme $q + 3^{2n} \in \mathbb{Z}$, on a $8 \mid (3^{2(n+1)}+7)$, donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5 — Opérations ensemblistes

1) Associativité de la différence symétrique

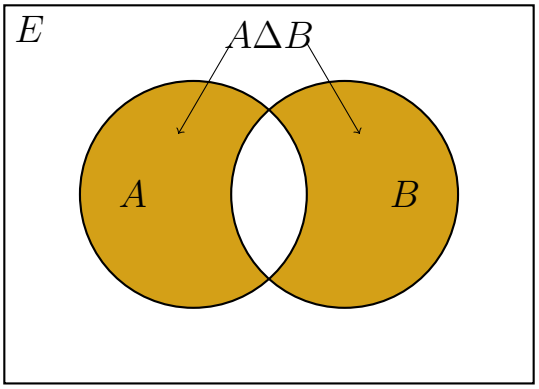


FIGURE 1 – Représentation de la différence symétrique $A\Delta B$

Montrer que

$$A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C.$$

Pour tout $x \in E$:

$$x \in X \,\Delta\, Y \iff (x \in X) \oplus (x \in Y)$$

Par conséquent, pour tous $A, B, C \subset E$ et pour tout $x \in E$:

$$x \in A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) \iff (x \in A) \oplus ((x \in B) \oplus (x \in C))$$

Table d'appartenance (1 signifie que x appartient 0 si non) :

A	B	C	$B\Delta C$	$A\Delta(B\Delta C)$	$A\Delta B$	$(A\Delta B)\Delta C$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	1

Les colonnes dorées sont identiques : Δ est associative.

2) Résolution d'équations en Δ

Identités

On utilise $X\Delta X = \varnothing$, $X\Delta\varnothing = X$ et l'associativité.

$$\begin{aligned} A \,\Delta\, X = \varnothing &\iff A = X. \\ A \,\Delta\, X = B &\iff A \,\Delta\, (A \,\Delta\, X) = A \,\Delta\, B \\ &\iff (A \,\Delta\, A) \,\Delta\, X = A \,\Delta\, B \\ &\iff \varnothing \,\Delta\, X = A \,\Delta\, B \\ &\iff X = A \,\Delta\, B. \end{aligned}$$

3) Produits cartésiens

Égalité vraie

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

En effet

$$\begin{aligned}(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\iff (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in C \wedge y \in D)\\ &\iff x \in A \cap C \ \wedge \ y \in B \cap D\\ &\iff (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D).\end{aligned}$$

Égalité fausse

$$(A \times B) \cup (C \times D) \ = \ (A \cup C) \times (B \cup D) \quad \text{est } \textbf{Fausse}.$$

Contre-exemple : $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$, $D = \{4\}$. Le couple $(1,4)$ appartient au second membre $(1 \in A \cup C,\ 4 \in B \cup D)$ mais ni à $A \times B$ ni à $C \times D$.

4) Deux calculs ensemblistes

a) Diviseurs dans $\mathbb{Z}$

On a $D_a \cap D_b = D_{\text{pgcd}(a,b)}$.

$$777 = 3 \times 7 \times 37, \qquad 33 = 3 \times 11, \qquad \text{pgcd}(777, 33) = 3.$$

$$3800 = 2^3 \times 5^2 \times 19, \qquad \text{pgcd}(3, 3800) = 1.$$

D'où

$$\begin{aligned}(D_{777} \cap D_{3800}) \cap D_{33} &= D_{777} \cap D_{33} \cap D_{3800},\\ &= D_{\text{pgcd}(777,33)} \cap D_{3800},\\ &= D_3 \cap D_{3800},\\ &= D_1,\\ &= \{-1, 1\}.\end{aligned}$$

b) Parties de $\mathbb{R}^2$

En prenant $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ et $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$:

$$\begin{aligned}(\{(x,y) \mid x \geq 0\} \cap \{(x,y) \mid x = 0 \vee y = 0\}) \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-) &= ((\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R}^+ \times \{0\})) \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-),\\ &= (\{0\} \times \mathbb{R}^-) \cup (\mathbb{R}^+ \times \{0\}).\end{aligned}$$

Exercice 6 — Partitions

1) Partition de $\mathbb{N}$ par les restes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_k = \{ns + k \mid s \in \mathbb{N}\}$ pour $0 \leq k < n$.

Partition de $\mathbb{N}$

Montrons que la famille $(A_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ forme une partition de $\mathbb{N}$.

1. **Non-vacuité des parties :** Pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, en posant $s = 0$, on a $k = n \cdot 0 + k \in A_k$. Ainsi :
$$\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad A_k \neq \varnothing.$$

2. **Recouvrement de** $\mathbb{N}$ $\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k = \mathbb{N}\right)$ **:**

   - Par définition, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $A_k \subset \mathbb{N}$, donc $\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k \subset \mathbb{N}$.
   - Réciproquement, soit $x \in \mathbb{N}$. Par le théorème de la division euclidienne par $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists!(s,k) \in \mathbb{N}^2$ et $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ tels que :

   $$x = ns + k.$$

   D'où $x \in A_k$, et par suite $x \in \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$. On en déduit $\mathbb{N} \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$.

   D'où l'égalité $\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k = \mathbb{N}$.

3. **Disjonction deux à deux :** Soient $k, k' \in \{0, \ldots, n-1\}$ tels que $k \neq k'$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $A_k \cap A_{k'} \neq \varnothing$.

   Il existe alors un élément $x \in A_k \cap A_{k'}$, ce qui signifie qu'il existe $(s, s') \in \mathbb{N}^2$ tels que :

   $$x = ns + k \quad \text{et} \quad x = ns' + k'.$$

   Par unicité du reste dans la division euclidienne de x par n, on a nécessairement $k = k'$, ce qui contredit l'hypothèse $k \neq k'$. Par conséquent :

   $$\forall (k, k') \in \{0, \ldots, n-1\}^2, \quad k \neq k' \implies A_k \cap A_{k'} = \varnothing.$$

La famille $(A_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ constitue bien une partition de $\mathbb{N}$.

2) Partition emboîtée

Soit

$$B_0 = \varnothing \subsetneq B_1 \subsetneq \cdots \subsetneq B_n = A$$

et, pour $j = 1, \ldots, n$, posons

$$D_j = B_j \setminus B_{j-1}.$$

Nous allons montrer que

$$\mathcal{P} = \{D_1, \ldots, D_n\}$$

est une partition de A.

1. Non-vacuité :

Comme les inclusions sont strictes,

$$B_{j-1} \subsetneq B_j,$$

donc

$$B_j \setminus B_{j-1} \neq \varnothing.$$

Ainsi,

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad D_j \neq \varnothing.$$

2. Disjonction deux à deux :

Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $i < j$.

Puisque

$$B_i \subset B_{j-1},$$

on a

$$D_i = B_i \setminus B_{i-1} \subset B_i \subset B_{j-1}.$$

D'autre part,

$$D_j = B_j \setminus B_{j-1},$$

donc

$$D_j \cap B_{j-1} = \varnothing.$$

Par conséquent,

$$D_i \cap D_j = \varnothing.$$

Ainsi, les ensembles $D_1, \ldots, D_n$ sont deux à deux disjoints.

3. Recouvrement de A :

On a

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=1}^{n} D_j &= \bigcup_{j=1}^{n} (B_j \setminus B_{j-1}) \\ &= B_n \setminus B_0 \\ &= A \setminus \varnothing \\ &= A. \end{aligned}$$

Les trois propriétés sont donc vérifiées : les D_j sont non vides, deux à deux disjoints, et leur réunion est A.

Par conséquent,

$$\boxed{\mathcal{P} = \{D_1, \ldots, D_n\} \text{ est une partition de } A.}$$

3) Exemples de partitions

- **Partition de $\mathbb{R}$ en quatre parties :**

  Considérons la famille

  $$\mathcal{P} = \{]-\infty, 0[,\ \{0\},\ ]0, 1[,\ [1, +\infty[\}\,.$$

  Les quatre parties sont non vides et deux à deux disjointes. De plus,

  $$]-\infty, 0[\cup \{0\} \cup]0, 1[\cup [1, +\infty[= \mathbb{R}.$$

  Ainsi,

  $$\boxed{\mathcal{P} = \{]-\infty, 0[,\ \{0\},\ ]0, 1[,\ [1, +\infty[\}}$$

  est une partition de $\mathbb{R}$.

- **Partition de $\mathbb{C}$ en trois parties :**

  Considérons la famille

  $$\mathcal{P} = \{\{0\},\ \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| \leq 1\},\ \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}\}\,.$$

  Les trois parties sont non vides. Elles sont deux à deux disjointes, car les conditions

  $$z = 0, \qquad 0 < |z| \leq 1, \qquad |z| > 1$$

  sont incompatibles deux à deux.

  De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a nécessairement

  $$z = 0, \qquad 0 < |z| \leq 1, \qquad \text{ou} \qquad |z| > 1.$$

  Par conséquent,

  $$\{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| \leq 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\} = \mathbb{C}.$$

  Ainsi,

  $$\boxed{\mathcal{P} = \{\{0\},\ \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| \leq 1\},\ \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}\}}$$

  est une partition de $\mathbb{C}$.

4) Produit de deux partitions

Produit de partitions

Soient

$$\mathcal{D} = \{D_j\}_{j\in J}$$

une partition de A et

$$\mathcal{F} = \{F_k\}_{k\in K}$$

une partition de B.

Considérons la famille

$$\mathcal{P} = \{D_j \times F_k \mid j \in J,\ k \in K\}.$$

Nous allons montrer que $\mathcal{P}$ est une partition de $A \times B$.

1. Non-vacuité :

Puisque $\mathcal{D}$ et $\mathcal{F}$ sont des partitions,

$$D_j \neq \varnothing \qquad \text{et} \qquad F_k \neq \varnothing.$$

Ainsi,

$$D_j \times F_k \neq \varnothing \qquad \text{pour tout } (j,k) \in J \times K.$$

2. Recouvrement de $A \times B$:

On a

$$\begin{aligned}\bigcup_{(j,k)\in J\times K} (D_j \times F_k) &= \left(\bigcup_{j\in J} D_j\right) \times \left(\bigcup_{k\in K} F_k\right)\\ &= A \times B.\end{aligned}$$

3. Disjonction deux à deux :

Soient $(j,k),(j',k') \in J \times K$ tels que

$$(j,k) \neq (j',k').$$

Alors

$$j \neq j' \qquad \text{ou} \qquad k \neq k'.$$

Comme les D_j sont deux à deux disjoints et les F_k également, on a

$$D_j \cap D_{j'} = \varnothing \quad \text{si } j \neq j',$$

et

$$F_k \cap F_{k'} = \varnothing \quad \text{si } k \neq k'.$$

Or,

$$(D_j \times F_k) \cap (D_{j'} \times F_{k'}) = (D_j \cap D_{j'}) \times (F_k \cap F_{k'}).$$

Ainsi, dans tous les cas,

$$(D_j \times F_k) \cap (D_{j'} \times F_{k'}) = \varnothing.$$

Les trois propriétés étant vérifiées, on conclut que

$$\boxed{\{D_j \times F_k \mid j \in J,\ k \in K\} \text{ est une partition de } A \times B.}$$

Exercice 7 — Logique, implications et ensembles

1) Transitivité de l'implication

Table de $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$, notée Φ.

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	Φ
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

La dernière colonne ne contient que des 1 : c'est une **tautologie**.

2) Simplifications

$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \iff (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$. Forme déjà irréductible (chaîne d'implications).

$$\begin{aligned}
[P \vee (Q \wedge R)] \wedge (\neg P \vee Q) &\iff [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)] \wedge (\neg P \vee Q), \\
&\iff (P \vee R) \wedge [(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)] \ (\text{ Associativite du } \wedge), \\
&\iff (P \vee R) \wedge [(P \wedge \neg P) \vee Q)], \\
&\iff (P \vee R) \wedge [\bot \vee Q] \ \ (\text{Contradiction : } X \wedge \neg X \equiv \bot), \\
&\iff (P \vee R) \wedge Q.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\big((P \vee Q) \Rightarrow R\big) \wedge (\neg R \vee P) &\iff \big(\neg(P \vee Q) \vee R\big) \wedge (\neg R \vee P) \ \ (\text{Définition de l'implication}) \\
&\iff \big((\neg P \wedge \neg Q) \vee R\big) \wedge (\neg R \vee P) \ \ (\text{Loi de De Morgan}) \\
&\iff \Big[\big((\neg P \wedge \neg Q) \vee R\big) \wedge \neg R\Big] \vee \Big[\big((\neg P \wedge \neg Q) \vee R\big) \wedge P\Big] \ (\text{Dis de } \wedge \text{ sur } \vee) \\
&\iff \Big[\big((\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg R\big) \vee (R \wedge \neg R)\Big] \vee \Big[(\neg P \wedge \neg Q \wedge P) \vee (R \wedge P)\Big] \ (\ //\ //\ ) \\
&\iff \Big[(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee \bot\Big] \vee \Big[\bot \vee (P \wedge R)\Big] \ \ (\text{Contradiction : } X \wedge \neg X \equiv \bot) \\
&\iff (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge R).
\end{aligned}$$

3) Équivalences ?

- $P : \forall m,\ \exists n,\ n > m^2 + 1$ (vraie : prendre $n = m^2 + 2$).
  $Q : \exists n,\ \forall m,\ n > m^2 + 1$ (fausse : aucun n ne majore tous les $m^2 + 1$).
  P **et** Q **ne sont pas équivalentes.**
- $$\begin{aligned}
  P : (A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow B) &\iff (\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \iff (\neg A \wedge \neg C) \vee B \\
  &\iff (A \vee C) \Rightarrow B, \\
  Q : (A \wedge C) \Rightarrow B.&
  \end{aligned}$$

  Q est plus faible que P (prendre A vrai, C faux, B faux : Q vraie, P fausse). P **et** Q **ne sont pas équivalentes.**

4) Ensembles définis par des progressions arithmétiques

On considère $A = \{8n + 12 \mid n\}$ et $B = \{8n + 4 \mid n\}$.

- Dans $\mathbb{N}$: $4 \in B$ (pour $n = 0$) mais $4 \notin A$ (tout élément de A est ≥ 12). Donc $A \neq B$.
- Dans $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} A &= \{8n + 12 | n \in \mathbb{Z}\}, \\ &= \{8(n + 1) + 4 | n \in \mathbb{Z}\}, \\ &= \{8m + 4 | m \in \mathbb{Z}\}, \\ &= \{8n + 4 | n \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B &= \{8n + 12 | n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{8n + 12 | n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{8n + 12 | n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{8n + 12 | n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{A = B}.$$

Document rédigé par Mohamed Najib LAATABI — UM5 Rabat, Faculté des Sciences
Email : najib.laatabi@um5r.ac.ma