UM5 Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année 2025/2026
Licence MI — S_1
Module : Algèbre I

Série 2

Ensembles, applications et relations binaires

Énoncés des exercices

Notations. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ et $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E et $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble de ses parties finies. L'inclusion $\subseteq$ n'est pas nécessairement stricte. $A \Delta B$ désigne la différence symétrique.

Exercice 1 : Propriétés des relations binaires

1. Dans $\mathbb{C}$, soit $\mathcal{R}$ la relation de graphe

$$E_{\mathcal{R}} = \{(z, \overline{z}) : z \in \mathbb{C}\}.$$

   Est-elle réflexive, symétrique, transitive ?

2. Mêmes questions pour la relation dans $\mathbb{Z}$ de graphe

$$E_{\mathcal{R}} = \{(3k - 2, 3k - 1) : k \in \mathbb{N}\}.$$

3. Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble E, à la fois symétrique et antisymétrique. Que peut-on dire de son graphe ?

Exercice 2 : Relation de parité

Dans $\mathbb{Z}$, on définit

$$a \mathcal{R} b \quad \Longleftrightarrow \quad b - a \in 2\mathbb{Z}.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

Exercice 3 : Ordre produit et ordre lexicographique

Soient $(A, \mathcal{R})$ et $(B, \mathcal{S})$ deux ensembles ordonnés.

1. Montrer que la relation sur $A \times B$ définie par

$$(a, b) \mathcal{T} (c, d) \quad \Longleftrightarrow \quad a \mathcal{R} c \text{ et } b \mathcal{S} d \qquad (*)$$

   est une relation d'ordre.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A \times B$ admette un plus grand élément.
3. Si A et B sont totalement ordonnés, $\mathcal{T}$ est-il total ?

4. Munir $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{F}(\mathbb{N})$ de l'ordre produit des inclusions. Étudier l'existence d'un plus grand élément, d'un plus petit élément, d'éléments maximaux et minimaux.
5. Munir $\mathbb{R}^2$ de l'ordre produit usuel. On pose

$$H = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}, \qquad K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}.$$

   i) Étudier les majorants et minorants dans $\mathbb{R}^2$, ainsi que les éléments maximaux et minimaux de H et de K.

   ii) Déterminer les minorants de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$ et de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$, puis leurs bornes inférieures.

   iii) Reprendre la question précédente pour l'ordre lexicographique, où la première coordonnée est prioritaire.

6. Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont des relations d'équivalence, la relation $(*)$ est-elle une relation d'équivalence ?

Exercice 4 : Ordre inverse et comparaison des cardinaux

On définit

$$U\mathcal{R}V \iff V \subseteq U \quad \text{sur } \mathcal{P}(\mathbb{N}), \qquad U\mathcal{S}V \iff \operatorname{card} U \leq \operatorname{card} V \quad \text{sur } \mathcal{F}(\mathbb{N}).$$

1. Ces relations sont-elles des relations d'ordre ?
2. Lorsqu'il s'agit d'un ordre, est-il total ? Déterminer les éléments maximaux, minimaux, le plus grand et le plus petit élément. Discuter aussi le cas de $\mathcal{S}$.
3. Soit $(A, \mathcal{T})$ un ensemble non vide ordonné. Posons $x\mathcal{T}'y \iff y\mathcal{T}x$. Est-ce un ordre ? À quelles conditions admet-il un plus petit élément, ou des éléments minimaux ?
4. Si $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence, comparer $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}$.

Exercice 5 : Images, antécédents et bijectivité

1. Soit $f_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(n, m) \mapsto n + m$. Déterminer $f_1^{-1}(\{0\})$, $f_1^{-1}(2\mathbb{N})$ et $\operatorname{Im}(f_1)$.
2. Soit $f_2 : (\mathbb{N}^*)^2 \to \mathbb{N}^*$, $(n, m) \mapsto \operatorname{pgcd}(2n, m)$. Est-elle surjective ? Injective ?
3. Soient $f_3, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_3(x) = 3x^2 + 6x - 1, \qquad g(x) = f_3(x) + 1.$$

   Déterminer $f_3([1, +\infty[\Delta] - \infty, 10[$. Étudier l'injectivité et la surjectivité de f_3 et g. Calculer $g^2(x) = (g \circ g)(x)$ et $[g(x)]^2$.
4. Soit $f_4 : \mathcal{F}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$, $U \mapsto \operatorname{card} U$.

   i) Étudier son injectivité et sa surjectivité.

   ii) Déterminer $f_4(\mathcal{A})$ dans chacun des cas

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{\{k\}\}, \qquad \mathcal{A} = \mathcal{F}(2\mathbb{N}), \qquad \mathcal{A} = \{U \in \mathcal{F}(\mathbb{N}) : \forall u \in U,\ u \leq 10\}.$$

Exercice 6 : Équivalence associée à une application

I. Soient A, B non vides et $f : A \to B$. Dans A, on pose $x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe $\overline{x}$ de chaque $x \in A$.
3. Étudier la correspondance $\widetilde{f} : A/\mathcal{R} \to B$, $\overline{x} \mapsto f(x)$: est-elle bien définie, injective, surjective ?

II. On considère les relations

$$x\mathcal{R}_1 y \iff x^2 - y^2 = x - y \qquad (x, y \in \mathbb{R}),$$
$$(x, y)\mathcal{R}_2(x', y') \iff x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 \quad ((x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2).$$

1. Vérifier qu'il s'agit de relations d'équivalence et déterminer leurs classes.
2. Les correspondances suivantes sont-elles des applications bijectives ?

$$g : \mathbb{R}/\mathcal{R}_1 \to \mathbb{R}, \quad [x] \mapsto x^2 - 3, \qquad h : \mathbb{R}^2/\mathcal{R}_2 \to \mathbb{R}, \quad [(x, y)] \mapsto x^2 + y^2.$$

Exercice 7 : Classes de fonctions continues

Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ continue}\}$. On définit $f\mathcal{R}g \iff f(0) = g(0)$.

1. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
2. Existe-t-il $f \in E$ dont la classe $\mathrm{cl}(f)$ soit finie ?
3. L'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ est-il fini ?
4. La correspondance $G : E/\mathcal{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{cl}(f) \mapsto f(1)$ est-elle une application ? Même question en remplaçant 1 par 0.

Exercice 8 : Bijection entre les naturels et les relatifs

1. Montrer que l'application suivante est bijective et déterminer sa réciproque :

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \qquad f(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ pair}, \\ -(n+1)/2, & n \text{ impair}. \end{cases}$$

2. Existe-t-il une bijection $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad a \leq b \iff g(a) \leq g(b) \ ?$$

Exercice 9 : Fonctions indicatrices

1. Soient $E \neq \varnothing$ et $A, B \subseteq E$. Montrer que

$$\mathbf{1}_{A \cup B} = \min(1, \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B).$$

2. i) Pour $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, écrire $f = a\mathbf{1}_{A_1} + b\mathbf{1}_{A_2}$ sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \mathbf{1}_{D_i},$$

où les $D_i \subseteq \mathbb{R}$ sont deux à deux disjoints.

ii) En déduire que toute fonction $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, avec $n \geq 1$ et $A_i \subseteq \mathbb{R}$, admet une écriture de cette forme.

3. Dans $\mathbb{Z}$, simplifier le produit $\mathbf{1}_{12\mathbb{Z}}\mathbf{1}_{33\mathbb{Z}}\mathbf{1}_{27\mathbb{Z}}$.

Exercice 10 : Construction de l'ensemble des entiers relatifs

On considère $\mathbb{Z}$ comme le quotient de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ par la relation

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff a+d=b+c.$$

La classe de (a,b) est notée $\overline{(a,b)}$; l'entier naturel n est identifié à $\overline{(n,0)}$ et son opposé à $\overline{(0,n)}$.

1. i) Déterminer la classe $\overline{(0,0)}$.
   ii) Pour une classe $\overline{(a,b)}$, existe-t-il toujours $n\in\mathbb{N}$ tel que $n=\overline{(a,b)}$? Préciser la condition.
   iii) Existe-t-il toujours $m\in\mathbb{N}$ tel que $-m=\overline{(a,b)}$? Préciser la condition.
2. La multiplication est définie par

$$\overline{(a,b)}\,\overline{(c,d)}=\overline{(ac+bd,bc+ad)}.$$

Vérifier, pour $u,v,w\in\mathbb{Z}$ et $n,m\in\mathbb{N}$, que

$$uv=vu,\quad (uv)w=u(vw),\quad u(v+w)=uv+uw,$$

et

$$\overline{(1,0)}u=u\overline{(1,0)}=u,\qquad \overline{(n,m)}\,\overline{(0,0)}=\overline{(0,0)}\,\overline{(m,0)}.$$

On rappelle l'addition $\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}=\overline{(a+c,b+d)}$.

Exercice 11 : Cardinaux et applications entre quotients

1. Soient A,B deux ensembles finis non vides et $f:A\to B$. Comparer $\operatorname{card}A$ et $\operatorname{card}f(A)$. Si $\operatorname{card}A=\operatorname{card}B$, montrer que toute application surjective $f:A\to B$ est bijective.
2. Soit $E\neq\varnothing$ muni de deux relations d'équivalence distinctes $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$. On pose

$$A=E/\mathcal{R}=\{[x]_{\mathcal{R}}:x\in E\},\qquad B=E/\mathcal{S}=\{[x]_{\mathcal{S}}:x\in E\}.$$

On suppose A,B finis et $[x]_{\mathcal{R}}\subseteq[x]_{\mathcal{S}}$ pour tout $x\in E$. Comparer $\operatorname{card}A$ et $\operatorname{card}B$. Étudier si les correspondances suivantes sont bien définies et, le cas échéant, leur injectivité et leur surjectivité :

$$f_1:A\to B,\quad [x]_{\mathcal{R}}\mapsto[x]_{\mathcal{S}},\qquad f_2:B\to A,\quad [x]_{\mathcal{S}}\mapsto[x]_{\mathcal{R}}.$$

3. À quelle condition sur $n,m\in\mathbb{Z}$ la correspondance

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\qquad a+n\mathbb{Z}\longmapsto a+m\mathbb{Z}$$

est-elle bien définie ?

Prof : Mohamed Najib LAATABI
najib.laatabi@um5r.ac.ma