UM5 Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année 2025/2026
Licence MI — S_1
Module : Algèbre I

Série 2

Ensembles, applications et relations binaires

Énoncés et corrigés détaillés

Notations. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ et $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E et $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble de ses parties finies. L'inclusion $\subseteq$ n'est pas nécessairement stricte. $A \Delta B$ désigne la différence symétrique.

Exercice 1 : Propriétés des relations binaires

1. Dans $\mathbb{C}$, soit $\mathcal{R}$ la relation de graphe

$$E_{\mathcal{R}} = \{(z, \overline{z}) : z \in \mathbb{C}\}.$$

   Est-elle réflexive, symétrique, transitive ?

2. Mêmes questions pour la relation dans $\mathbb{Z}$ de graphe

$$E_{\mathcal{R}} = \{(3k - 2, 3k - 1) : k \in \mathbb{N}\}.$$

3. Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble E, à la fois symétrique et antisymétrique. Que peut-on dire de son graphe ?

1) Relation de conjugaison

On a $z\mathcal{R}w \iff w = \overline{z}$.

- Elle n'est pas réflexive : $i \neq \overline{i} = -i$, donc $i \not\mathcal{R} i$.
- Elle est symétrique : $w = \overline{z}$ implique $z = \overline{w}$.
- Elle n'est pas transitive : $i\mathcal{R}(-i)$ et $(-i)\mathcal{R}i$, mais $i \not\mathcal{R} i$.

2) Relation sur les entiers

Elle n'est pas réflexive, car aucun couple du graphe n'est de la forme (a, a). Elle n'est pas symétrique : $(1, 2) \in E_{\mathcal{R}}$, mais $(2, 1) \notin E_{\mathcal{R}}$. Pour une chaîne $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$, il faudrait $b = 3k - 1 = 3\ell - 2$, soit $3(\ell - k) = 1$, ce qui est impossible. L'implication définissant la transitivité est donc toujours vraie : la relation est transitive.

3) Symétrie et antisymétrie

Si $x\mathcal{R}y$, la symétrie donne $y\mathcal{R}x$; l'antisymétrie impose alors $x = y$. Ainsi

$$\boxed{E_{\mathcal{R}} \subseteq \{(x,x) : x \in E\}.}$$

Réciproquement, toute partie de la diagonale définit une relation symétrique et antisymétrique. Si elle est aussi réflexive, son graphe est exactement la diagonale.

Exercice 2 : Relation de parité

Dans $\mathbb{Z}$, on définit

$$a\mathcal{R}b \quad \Longleftrightarrow \quad b - a \in 2\mathbb{Z}.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

1) Relation d'équivalence

Pour $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a-a = 0 \in 2\mathbb{Z}$. Si $b-a \in 2\mathbb{Z}$, alors $a-b = -(b-a) \in 2\mathbb{Z}$. Si $b-a$ et $c-b$ appartiennent à $2\mathbb{Z}$, leur somme $c-a$ y appartient aussi. La relation est réflexive, symétrique et transitive.

2) Classes d'équivalence

Deux entiers sont équivalents exactement lorsqu'ils ont la même parité.

$$\overline{0} = 2\mathbb{Z}, \qquad \overline{1} = 2\mathbb{Z}+1, \qquad \boxed{\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}+1\}.}$$

Exercice 3 : Ordre produit et ordre lexicographique

Soient $(A, \mathcal{R})$ et $(B, \mathcal{S})$ deux ensembles ordonnés.

1. Montrer que la relation sur $A \times B$ définie par

$$(a,b)\mathcal{T}(c,d) \quad \Longleftrightarrow \quad a\mathcal{R}c \text{ et } b\mathcal{S}d \qquad (*)$$

est une relation d'ordre.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A \times B$ admette un plus grand élément.
3. Si A et B sont totalement ordonnés, $\mathcal{T}$ est-il total ?
4. Munir $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{F}(\mathbb{N})$ de l'ordre produit des inclusions. Étudier l'existence d'un plus grand élément, d'un plus petit élément, d'éléments maximaux et minimaux.
5. Munir $\mathbb{R}^2$ de l'ordre produit usuel. On pose

$$H = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}, \qquad K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}.$$

   i) Étudier les majorants et minorants dans $\mathbb{R}^2$, ainsi que les éléments maximaux et minimaux de H et de K.

   ii) Déterminer les minorants de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$ et de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$, puis leurs bornes inférieures.

   iii) Reprendre la question précédente pour l'ordre lexicographique, où la première coordonnée est prioritaire.

6. Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont des relations d'équivalence, la relation $(*)$ est-elle une relation d'équivalence ?

1) Vérification de l'ordre

La réflexivité et la transitivité se vérifient sur chaque coordonnée. Si $(a,b)\mathcal{T}(c,d)$ et $(c,d)\mathcal{T}(a,b)$, l'antisymétrie sur A et sur B donne $a=c$ et $b=d$. Donc $\mathcal{T}$ est un ordre.

2) Plus grand élément

Si A et B ont respectivement pour plus grands éléments a_* et b_*, alors (a_*,b_*) est le plus grand élément de $A\times B$. Réciproquement, si (a_*,b_*) est le plus grand élément du produit, les comparaisons avec (a,b_*) et (a_*,b) montrent que a_* et b_* sont les plus grands éléments des facteurs.

$$\boxed{A\times B \text{ a un plus grand élément} \iff A \text{ et } B \text{ en ont chacun un.}}$$

3) Totalité

Si les deux ensembles possèdent chacun au moins deux éléments, prenons $a_1<a_2$ et $b_1<b_2$. Les couples (a_1,b_2) et (a_2,b_1) sont incomparables. L'ordre produit n'est donc pas total en général. Si l'un des ensembles a au plus un élément, le produit est totalement ordonné lorsque les deux ordres de départ sont totaux.

4) Produit de deux ensembles de parties

Le couple $(\varnothing,\varnothing)$ est le plus petit élément ; c'est aussi l'unique élément minimal. Pour tout (U,V), il existe $n\in\mathbb{N}\setminus V$ puisque V est fini. Alors $(U,V)<(U,V\cup\{n\})$. Il n'existe donc aucun élément maximal, et en particulier aucun plus grand élément.

5i) Majorants, minorants et éléments extrémaux

Ensemble H. Ses deux coordonnées ne sont bornées ni supérieurement ni inférieurement : H n'a ni majorant ni minorant dans $\mathbb{R}^2$. Si $(x,-x)\le(t,-t)$, alors $x\le t$ et $x\ge t$, donc $x=t$. Tous ses éléments sont à la fois maximaux et minimaux.

Ensemble K. Puisque $H\subseteq K$, il n'a non plus ni majorant ni minorant. Il n'a pas d'élément maximal, car $(x+1,y+1)\in K$ est strictement supérieur à $(x,y)\in K$. Si $x+y>0$, le point $(x-\delta,y)$, avec $0<\delta<x+y$, appartient à K et lui est strictement inférieur. Si $x+y=0$ et $(u,v)\in K$ satisfait $u\le x$, $v\le y$, alors $0\le u+v\le x+y=0$ impose $u=x$, $v=y$. Les éléments minimaux de K sont donc exactement les points de H.

5ii) Minorants pour l'ordre produit

Pour $C=\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}_+$ et $D=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Min}_{\mathbb{R}^2}(C)&=]-\infty,1]\times]-\infty,0], \quad \inf C=(1,0),\\ \mathrm{Min}_{\mathbb{R}^2}(D)&=]-\infty,0]\times]-\infty,1], \quad \inf D=(0,1).\end{aligned}$$

Ici $\mathrm{Min}_{\mathbb{R}^2}$ désigne l'ensemble des *minorants*, et non celui des éléments minimaux. Le point $(1,0)$ appartient à C, tandis que $(0,1)\notin D$.

5iii) Minorants pour l'ordre lexicographique

On utilise $(s,t) \leq_{\text{lex}} (x,y)$ si $s < x$, ou si $s = x$ et $t \leq y$. Pour C, l'ensemble des minorants est

$$(]-\infty, 1[\times\mathbb{R}) \ \cup \ (\{1\}\times]-\infty, 0]).$$

Son plus grand élément est $(1,0)$, donc $\inf_{\text{lex}} C = (1,0)$. Pour D, les minorants sont exactement

$$]-\infty, 0] \times \mathbb{R}.$$

Cet ensemble n'a pas de plus grand élément : chaque $(0,t)$ est strictement inférieur à $(0,t+1)$. Donc D n'a pas de borne inférieure pour l'ordre lexicographique.

6) Produit de relations d'équivalence

La réflexivité, la symétrie et la transitivité passent chacune aux coordonnées. Ainsi $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence et

$$[(a,b)]_{\mathcal{T}} = [a]_{\mathcal{R}} \times [b]_{\mathcal{S}}.$$

Exercice 4 : Ordre inverse et comparaison des cardinaux

On définit

$$U\mathcal{R}V \iff V \subseteq U \quad \text{sur } \mathcal{P}(\mathbb{N}), \qquad U\mathcal{S}V \iff \operatorname{card} U \leq \operatorname{card} V \quad \text{sur } \mathcal{F}(\mathbb{N}).$$

1. Ces relations sont-elles des relations d'ordre ?
2. Lorsqu'il s'agit d'un ordre, est-il total ? Déterminer les éléments maximaux, minimaux, le plus grand et le plus petit élément. Discuter aussi le cas de $\mathcal{S}$.
3. Soit $(A,\mathcal{T})$ un ensemble non vide ordonné. Posons $x\mathcal{T}'y \iff y\mathcal{T}x$. Est-ce un ordre ? À quelles conditions admet-il un plus petit élément, ou des éléments minimaux ?
4. Si $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence, comparer $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}$.

1) Nature des relations

L'inclusion inverse est réflexive, antisymétrique et transitive : $\mathcal{R}$ est un ordre. La relation $\mathcal{S}$ est réflexive et transitive, mais n'est pas antisymétrique : $\{0\}\mathcal{S}\{1\}$ et $\{1\}\mathcal{S}\{0\}$ sans égalité des ensembles. C'est un préordre total.

2) Éléments extrémaux

Pour $\mathcal{R}$, $\mathbb{N}$ est le plus petit élément et $\varnothing$ le plus grand. Ils sont respectivement l'unique élément minimal et l'unique élément maximal. L'ordre n'est pas total, car $\{0\}$ et $\{1\}$ sont incomparables pour l'inclusion inverse.

La relation $\mathcal{S}$ n'est pas un ordre. Si l'on emploie les notions correspondantes pour un préordre, $\varnothing$ est le plus petit élément et le seul élément minimal. Il n'y a aucun élément maximal ni plus grand élément, car on peut toujours augmenter le cardinal d'une partie finie.

3) Ordre opposé

Les trois propriétés d'un ordre passent à la relation inverse. Un élément est le plus petit pour $\mathcal{T}'$ exactement lorsqu'il est le plus grand pour $\mathcal{T}$; il est minimal pour $\mathcal{T}'$ exactement lorsqu'il est maximal pour $\mathcal{T}$.

4) Cas d'une équivalence

La symétrie donne $y\mathcal{T}x \iff x\mathcal{T}y$, donc $\boxed{\mathcal{T}' = \mathcal{T}}$.

Exercice 5 : Images, antécédents et bijectivité

1. Soit $f_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(n,m) \mapsto n+m$. Déterminer $f_1^{-1}(\{0\})$, $f_1^{-1}(2\mathbb{N})$ et $\mathrm{Im}(f_1)$.
2. Soit $f_2 : (\mathbb{N}^*)^2 \to \mathbb{N}^*$, $(n,m) \mapsto \mathrm{pgcd}(2n,m)$. Est-elle surjective ? Injective ?
3. Soient $f_3, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par
$$f_3(x) = 3x^2 + 6x - 1, \qquad g(x) = f_3(x) + 1.$$
Déterminer $f_3([1,+\infty[\Delta] - \infty, 10[$. Étudier l'injectivité et la surjectivité de f_3 et g. Calculer $g^2(x) = (g \circ g)(x)$ et $[g(x)]^2$.
4. Soit $f_4 : \mathcal{F}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$, $U \mapsto \mathrm{card}\, U$.
   i) Étudier son injectivité et sa surjectivité.
   ii) Déterminer $f_4(\mathcal{A})$ dans chacun des cas
$$\mathcal{A} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{\{k\}\}, \qquad \mathcal{A} = \mathcal{F}(2\mathbb{N}), \qquad \mathcal{A} = \{U \in \mathcal{F}(\mathbb{N}) : \forall u \in U,\ u \leq 10\}.$$

1) Somme de deux entiers naturels

$$f_1^{-1}(\{0\}) = \{(0,0)\}, \qquad \mathrm{Im}(f_1) = \mathbb{N},$$
car $f_1(n,0) = n$. La somme est paire exactement lorsque les deux termes ont la même parité :
$$f_1^{-1}(2\mathbb{N}) = (2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}) \cup ((2\mathbb{N}+1) \times (2\mathbb{N}+1)).$$

2) Application définie par le PGCD

Pour tout $k \geq 1$, $f_2(k,k) = \mathrm{pgcd}(2k,k) = k$: f_2 est surjective. Elle n'est pas injective, puisque $f_2(1,1) = f_2(2,1) = 1$.

3) Fonctions quadratiques

On a $f_3(x) = 3(x+1)^2 - 4$ et $g(x) = 3(x+1)^2 - 3$. La fonction f_3 est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et $f_3(1) = 8$. Donc $f_3([1,+\infty[) = [8,+\infty[$ et
$$\boxed{[8,+\infty[\Delta] - \infty, 10[=] - \infty, 8[\cup [10,+\infty[.}$$

Les fonctions ne sont pas injectives, car chacune prend la même valeur en 0 et en -2. Leurs images sont respectivement $[-4,+\infty[$ et $[-3,+\infty[$: elles ne sont pas surjectives sur $\mathbb{R}$. Enfin,

$$\begin{aligned}[g(x)]^2 &= (3x^2+6x)^2 = 9x^4+36x^3+36x^2,\\ g^2(x) &= 3(3x^2+6x)^2+6(3x^2+6x)\\ &= 27x^4+108x^3+126x^2+36x.\end{aligned}$$

4) Cardinal d'une partie finie

L'application n'est pas injective : $f_4(\{0\}) = f_4(\{1\}) = 1$. Elle est surjective : $\varnothing$ a cardinal 0 et $\{0,\dots,n-1\}$ a cardinal n pour $n \geq 1$. Les images demandées sont, dans l'ordre,

$$\boxed{\{1\}, \qquad \mathbb{N}, \qquad \{0,1,\dots,11\}.}$$

En effet, la première famille contient exactement les singletons ; la deuxième contient des parties de tout cardinal fini ; la troisième est $\mathcal{P}(\{0,1,\dots,10\})$.

Exercice 6 : Équivalence associée à une application

I. Soient A, B non vides et $f : A \to B$. Dans A, on pose $x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe $\overline{x}$ de chaque $x \in A$.
3. Étudier la correspondance $\widetilde{f} : A/\mathcal{R} \to B$, $\overline{x} \mapsto f(x)$: est-elle bien définie, injective, surjective ?

II. On considère les relations

$$\begin{aligned}x\mathcal{R}_1 y &\iff x^2-y^2 = x-y \qquad (x,y\in\mathbb{R}),\\ (x,y)\mathcal{R}_2(x',y') &\iff x^2+y^2 = x'^2+y'^2 \qquad ((x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2).\end{aligned}$$

1. Vérifier qu'il s'agit de relations d'équivalence et déterminer leurs classes.
2. Les correspondances suivantes sont-elles des applications bijectives ?

$$g : \mathbb{R}/\mathcal{R}_1 \to \mathbb{R}, \quad [x] \mapsto x^2-3, \qquad h : \mathbb{R}^2/\mathcal{R}_2 \to \mathbb{R}, \quad [(x,y)] \mapsto x^2+y^2.$$

I. Classes et application quotient

L'égalité dans B est réflexive, symétrique et transitive ; ces propriétés se transmettent à $\mathcal{R}$ par f. Pour tout $x \in A$,

$$\boxed{\overline{x} = \{y \in A : f(y) = f(x)\} = f^{-1}(\{f(x)\}).}$$

Si $\overline{x} = \overline{y}$, alors $f(x) = f(y)$: $\widetilde{f}$ est bien définie. Si $\widetilde{f}(\overline{x}) = \widetilde{f}(\overline{y})$, alors $x\mathcal{R}y$ et les classes sont égales. Elle est donc injective. Enfin, $\mathrm{Im}(\widetilde{f}) = f(A)$; elle est surjective sur B si et seulement si f l'est.

II.1) Deux exemples d'équivalences

La première relation est associée à $x \mapsto x^2 - x$. Puisque

$$x^2-y^2 = x-y \iff (x-y)(x+y-1) = 0,$$

on obtient $[x]_{\mathcal{R}_1} = \{x, 1-x\}$, réduit au singleton $\{1/2\}$ lorsque $x = 1/2$. La seconde relation est associée à $(x,y) \mapsto x^2+y^2$. Sa classe est

$$[(x,y)]_{\mathcal{R}_2} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 = x^2+y^2\}.$$

C'est le cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{x^2+y^2}$, ou le singleton $\{(0,0)\}$ si ce rayon est nul.

II.2) Étude des correspondances

Comme $[0]_{\mathcal{R}_1} = [1]_{\mathcal{R}_1}$, mais $0^2 - 3 = -3 \neq -2 = 1^2 - 3$, la correspondance g n'est pas bien définie.

La correspondance h est bien définie et injective par la partie I. Son image est $[0, +\infty[$: toute valeur $t \geq 0$ est obtenue sur la classe de $(\sqrt{t}, 0)$. Elle n'est donc pas surjective sur $\mathbb{R}$, mais devient bijective si son ensemble d'arrivée est $[0, +\infty[$.

Exercice 7 : Classes de fonctions continues

Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ continue}\}$. On définit $f \mathcal{R} g \iff f(0) = g(0)$.

1. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
2. Existe-t-il $f \in E$ dont la classe $\mathrm{cl}(f)$ soit finie ?
3. L'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ est-il fini ?
4. La correspondance $G : E/\mathcal{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{cl}(f) \mapsto f(1)$ est-elle une application ? Même question en remplaçant 1 par 0.

1) Équivalence

C'est la relation associée à l'application d'évaluation $f \mapsto f(0)$, donc une relation d'équivalence.

2) Cardinal des classes

Pour $t \in \mathbb{R}$, la fonction $f_t(x) = f(x) + tx$ est continue et satisfait $f_t(0) = f(0)$. De plus, $f_t = f_s$ impose $t = s$ en évaluant en 1. Toute classe contient donc une infinité de fonctions ; aucune classe n'est finie.

3) Ensemble quotient

L'application $\mathrm{cl}(f) \mapsto f(0)$ est bien définie et injective. Elle est surjective, car chaque $c \in \mathbb{R}$ est la valeur en 0 de la fonction constante $f(x) = c$. Ainsi $E/\mathcal{R}$ est en bijection avec $\mathbb{R}$; il est infini.

4) Dépendance du représentant

Les fonctions $f(x) = 0$ et $g(x) = x$ sont dans la même classe, mais $f(1) = 0 \neq 1 = g(1)$. L'évaluation en 1 ne définit donc pas une application sur le quotient. L'évaluation en 0 en définit une, et elle est même bijective d'après la question précédente.

Exercice 8 : Bijection entre les naturels et les relatifs

1. Montrer que l'application suivante est bijective et déterminer sa réciproque :

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \qquad f(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ pair}, \\ -(n+1)/2, & n \text{ impair}. \end{cases}$$

2. Existe-t-il une bijection $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad a \leq b \iff g(a) \leq g(b) \ ?$$

1) Bijection et réciproque

Pour $k \in \mathbb{N}$, $f(2k) = k$ et $f(2k+1) = -k-1$. Les entiers pairs donnent chacun une valeur distincte dans $\mathbb{N}$; les impairs donnent chacun une valeur distincte dans $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Ces deux images sont disjointes et leur réunion est $\mathbb{Z}$.

$$f^{-1}(z) = \begin{cases} 2z, & z \geq 0, \\ -2z-1, & z < 0. \end{cases}$$

2) Impossibilité d'une bijection préservant l'ordre

Supposons une telle bijection g et posons $a = g^{-1}(0)$. Puisque $a-1 < a$, la préservation de l'ordre et l'injectivité donnent $g(a-1) < g(a) = 0$, ce qui contredit $g(a-1) \in \mathbb{N}$. Une telle bijection n'existe donc pas.

Exercice 9 : Fonctions indicatrices

1. Soient $E \neq \varnothing$ et $A, B \subseteq E$. Montrer que
$$\mathbf{1}_{A \cup B} = \min(1, \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B).$$

2. i) Pour $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, écrire $f = a\mathbf{1}_{A_1} + b\mathbf{1}_{A_2}$ sous la forme
$$f = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \mathbf{1}_{D_i},$$
où les $D_i \subseteq \mathbb{R}$ sont deux à deux disjoints.

   ii) En déduire que toute fonction $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, avec $n \geq 1$ et $A_i \subseteq \mathbb{R}$, admet une écriture de cette forme.

3. Dans $\mathbb{Z}$, simplifier le produit $\mathbf{1}_{12\mathbb{Z}}\mathbf{1}_{33\mathbb{Z}}\mathbf{1}_{27\mathbb{Z}}$.

1) Indicatrice d'une réunion

Si $x \notin A \cup B$, les deux membres valent 0. Si x appartient à exactement un des deux ensembles, les deux membres valent 1. Si $x \in A \cap B$, le membre de droite vaut $\min(1,2) = 1$, comme le membre de gauche. L'identité est donc vraie point par point.

2i) Deux ensembles

Les ensembles $D_1 = A_1 \setminus A_2$, $D_2 = A_2 \setminus A_1$ et $D_3 = A_1 \cap A_2$ sont deux à deux disjoints, et

$$f = a\mathbf{1}_{A_1 \setminus A_2} + b\mathbf{1}_{A_2 \setminus A_1} + (a+b)\mathbf{1}_{A_1 \cap A_2}.$$

À l'extérieur de $A_1 \cup A_2$, la fonction vaut 0. On peut supprimer les ensembles vides ou les termes de coefficient nul.

2ii) Famille finie d'ensembles

Pour chaque $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, posons

$$D_I = \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j \notin I} (\mathbb{R} \setminus A_j)\right), \qquad \gamma_I = \sum_{i \in I} \alpha_i.$$

Une intersection vide d'ensembles est ici interprétée comme $\mathbb{R}$ et une somme vide comme 0. Les D_I forment une famille deux à deux disjointe dont la réunion est $\mathbb{R}$. Pour $x \in D_I$, les indices i tels que $x \in A_i$ sont exactement ceux de I ; donc $f(x) = \gamma_I$. Ainsi

$$\boxed{f = \sum_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} \gamma_I \mathbf{1}_{D_I}.}$$

Après suppression des ensembles vides, cette somme comporte au plus 2^n termes.

3) Produit d'indicatrices

Le produit des indicatrices est l'indicatrice de l'intersection. Or les multiples communs de 12, 33 et 27 sont les multiples de leur PPCM. Comme $12 = 2^2 \times 3$, $33 = 3 \times 11$ et $27 = 3^3$,

$$\operatorname{ppcm}(12, 33, 27) = 2^2 \times 3^3 \times 11 = 1188.$$

$$\boxed{\mathbf{1}_{12\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{33\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{27\mathbb{Z}} = \mathbf{1}_{1188\mathbb{Z}}.}$$

Exercice 10 : Construction de l'ensemble des entiers relatifs

On considère $\mathbb{Z}$ comme le quotient de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par la relation

$$(a, b) \mathcal{R} (c, d) \iff a + d = b + c.$$

La classe de (a, b) est notée $\overline{(a, b)}$; l'entier naturel n est identifié à $\overline{(n, 0)}$ et son opposé à $\overline{(0, n)}$.

1. i) Déterminer la classe $\overline{(0, 0)}$.

   ii) Pour une classe $\overline{(a, b)}$, existe-t-il toujours $n \in \mathbb{N}$ tel que $n = \overline{(a, b)}$? Préciser la condition.

   iii) Existe-t-il toujours $m \in \mathbb{N}$ tel que $-m = \overline{(a, b)}$? Préciser la condition.

2. La multiplication est définie par

$$\overline{(a, b)}\,\overline{(c, d)} = \overline{(ac + bd, bc + ad)}.$$

   Vérifier, pour $u, v, w \in \mathbb{Z}$ et $n, m \in \mathbb{N}$, que

$$uv = vu, \quad (uv)w = u(vw), \quad u(v + w) = uv + uw,$$

   et

$$\overline{(1, 0)}u = u\overline{(1, 0)} = u, \qquad \overline{(n, m)}\,\overline{(0, 0)} = \overline{(0, 0)}\,\overline{(m, 0)}.$$

   On rappelle l'addition $\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)}$.

1) Classes et signes

Par définition,

$$\boxed{\overline{(0,0)} = \{(k,k) : k \in \mathbb{N}\}.}$$

L'égalité $\overline{(a,b)} = \overline{(n,0)}$ équivaut à $a = b+n$. Un tel n existe si et seulement si $a \geq b$, et vaut alors $a-b$. De même, $\overline{(a,b)} = \overline{(0,m)}$ équivaut à $a+m = b$: elle est possible si et seulement si $a \leq b$, avec $m = b-a$. Toute classe admet l'une de ces deux formes ; les deux sont possibles simultanément exactement pour la classe nulle.

2) Propriétés de la multiplication

Écrivons $u = \overline{(a,b)}$, $v = \overline{(c,d)}$ et $w = \overline{(e,f)}$.

Commutativité. Les deux couples $(ac+bd, bc+ad)$ et $(ca+db, da+cb)$ sont égaux. Donc $uv = vu$.

Associativité. En développant la définition deux fois, on trouve

$$(uv)w = \overline{(ace+bde+bcf+adf,\ bce+ade+acf+bdf)},$$
$$u(vw) = \overline{(ace+adf+bcf+bde,\ bce+bdf+acf+ade)}.$$

Les coordonnées sont les mêmes après réorganisation des termes.

Distributivité. Les couples représentant $u(v+w)$ et $uv+uw$ sont respectivement

$$(a(c+e)+b(d+f),\ b(c+e)+a(d+f)),$$
$$(ac+bd+ae+bf,\ bc+ad+be+af).$$

Ces couples sont égaux par distributivité dans $\mathbb{N}$.

Élément unité et élément absorbant.

$$\overline{(1,0)}\,\overline{(a,b)} = \overline{(a,b)}, \qquad \overline{(a,b)}\,\overline{(0,0)} = \overline{(0,0)}.$$

Par commutativité, les identités analogues à droite sont aussi vraies. Les deux membres de la dernière égalité de l'énoncé sont donc la classe nulle.

Exercice 11 : Cardinaux et applications entre quotients

1. Soient A, B deux ensembles finis non vides et $f : A \to B$. Comparer $\operatorname{card} A$ et $\operatorname{card} f(A)$. Si $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$, montrer que toute application surjective $f : A \to B$ est bijective.

2. Soit $E \neq \varnothing$ muni de deux relations d'équivalence distinctes $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$. On pose

$$A = E/\mathcal{R} = \{[x]_{\mathcal{R}} : x \in E\}, \qquad B = E/\mathcal{S} = \{[x]_{\mathcal{S}} : x \in E\}.$$

   On suppose A, B finis et $[x]_{\mathcal{R}} \subseteq [x]_{\mathcal{S}}$ pour tout $x \in E$. Comparer $\operatorname{card} A$ et $\operatorname{card} B$. Étudier si les correspondances suivantes sont bien définies et, le cas échéant, leur injectivité et leur surjectivité :

$$f_1 : A \to B, \quad [x]_{\mathcal{R}} \mapsto [x]_{\mathcal{S}}, \qquad f_2 : B \to A, \quad [x]_{\mathcal{S}} \mapsto [x]_{\mathcal{R}}.$$

3. À quelle condition sur $n, m \in \mathbb{Z}$ la correspondance

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \qquad a+n\mathbb{Z} \longmapsto a+m\mathbb{Z}$$

   est-elle bien définie ?

1) Image d'un ensemble fini

Les fibres non vides $f^{-1}(\{y\})$, $y \in f(A)$, forment une partition de A. Donc

$$\operatorname{card} A = \sum_{y \in f(A)} \operatorname{card} f^{-1}(\{y\}) \geq \operatorname{card} f(A).$$

L'égalité a lieu exactement lorsque toutes les fibres ont un seul élément, c'est-à-dire lorsque f est injective. Si f est surjective et $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$, alors $\operatorname{card} f(A) = \operatorname{card} B = \operatorname{card} A$: f est injective, donc bijective.

2) Comparaison de deux quotients

L'hypothèse sur les classes équivaut à $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$. Si $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$, alors $x\mathcal{R}y$, donc $x\mathcal{S}y$ et $[x]_{\mathcal{S}} = [y]_{\mathcal{S}}$. Ainsi f_1 est bien définie. Elle est surjective, car chaque classe $[x]_{\mathcal{S}}$ est l'image de $[x]_{\mathcal{R}}$.

Les deux relations étant distinctes, il existe x, y tels que $x\mathcal{S}y$ mais $x \not\mathcal{R}y$. Les classes $[x]_{\mathcal{R}}$ et $[y]_{\mathcal{R}}$ sont distinctes et ont la même image. Donc f_1 n'est pas injective. Comme les quotients sont finis,

$$\boxed{\operatorname{card}(E/\mathcal{R}) > \operatorname{card}(E/\mathcal{S}).}$$

Pour ces mêmes x, y, une seule classe de $\mathcal{S}$ conduirait à deux classes différentes de $\mathcal{R}$: f_2 n'est pas bien définie. Plus généralement, sous l'hypothèse $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$, f_2 est bien définie exactement lorsque $\mathcal{R} = \mathcal{S}$.

3) Changement de module

La correspondance est bien définie si et seulement si

$$a - b \in n\mathbb{Z} \Longrightarrow a - b \in m\mathbb{Z},$$

c'est-à-dire si et seulement si $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$. En prenant $a = n$ et $b = 0$, cette inclusion impose $m \mid n$. Réciproquement, si $n = mk$, tout multiple de n est un multiple de m.

> $\boxed{\text{La correspondance est bien définie si et seulement si } m \mid n.}$

Cette condition inclut les modules nuls : si $n = 0$, tout m convient ; si $m = 0$, il faut $n = 0$.

Prof : Mohamed Najib LAATABI
najib.laatabi@um5r.ac.ma