UM5 Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



Année 2025/2026
Licence MI — S_1
Module : Algèbre I

Série d'exercices : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Mathématiques générales — Algèbre I

Énoncés des exercices

Partie 1 : Division euclidienne et algorithme d'Euclide

Exercice 1 : PGCD, PPCM et algorithme d'Euclide

Soient les entiers $a = 462$ et $b = 65$.

1. Effectuer la division euclidienne de a par b. Préciser le quotient et le reste.
2. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer $\text{pgcd}(462, 65)$.
3. En déduire $\text{ppcm}(462, 65)$ en utilisant la relation entre PGCD et PPCM.
4. Les nombres a et b sont-ils premiers entre eux ?

Exercice 2 : Divisibilité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si un entier divise à la fois $15n + 4$ et $10n + 3$, alors il divise 5.

Partie 2 : Théorèmes de Bézout et de Gauss

Exercice 3 : Identité de Bézout et Euclide étendu

On considère l'équation

$$37u + 11v = 1, \qquad (u, v) \in \mathbb{Z}^2.$$

1. Justifier pourquoi cette équation admet des solutions entières.
2. À l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu, trouver une solution particulière (u_0, v_0).

Exercice 4 : Équation diophantienne et Gauss

On cherche à résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$(E) : \quad 37x + 11y = 5.$$

1. En utilisant l'exercice précédent, donner une solution particulière (x_0, y_0) de (E).
2. Soit (x, y) une solution quelconque. Montrer que $37(x - x_0) = -11(y - y_0)$.
3. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer la forme générale des solutions de (E).

Partie 3 : Congruences et petit théorème de Fermat

Exercice 5 : Calculs modulaires

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2023 par 5.
2. Montrer que $13 \equiv -1 \pmod 7$. En déduire le reste de la division euclidienne de 13^{2024} par 7.

Exercice 6 : Petit théorème de Fermat

Soit $p = 11$, qui est un nombre premier.

1. Calculer 3^{10} modulo 11.
2. En déduire sans calculatrice le reste de la division euclidienne de 3^{2025} par 11.
3. Trouver l'inverse de $\overline{4}$ dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

Partie 4 : Primalité et fonction d'Euler

Exercice 7 : Décomposition et diviseurs

Soit l'entier $n = 360$.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de n.
2. Déterminer le nombre de diviseurs positifs de n, puis le nombre de ses diviseurs dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 8 : Fonction indicatrice d'Euler

Pour $n \geq 2$, la fonction indicatrice d'Euler $\varphi(n)$ compte les entiers a tels que $1 \leq a < n$ et $\text{pgcd}(a, n) = 1$.

1. Calculer $\varphi(13)$.
2. Calculer $\varphi(10)$.
3. Sachant que, si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ est la décomposition de n en facteurs premiers distincts, alors

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right),$$

calculer $\varphi(360)$.

Prof : Mohamed Najib LAATABI
najib.laatabi@um5r.ac.ma