UM5 Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année 2025/2026
Licence MI — S_1
Module : Algèbre I

Série d'exercices : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Mathématiques générales — Algèbre I

Énoncés et corrigés détaillés

Partie 1 : Division euclidienne et algorithme d'Euclide

Exercice 1 : PGCD, PPCM et algorithme d'Euclide

Soient les entiers $a = 462$ et $b = 65$.

1. Effectuer la division euclidienne de a par b. Préciser le quotient et le reste.
2. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer $\text{pgcd}(462, 65)$.
3. En déduire $\text{ppcm}(462, 65)$ en utilisant la relation entre PGCD et PPCM.
4. Les nombres a et b sont-ils premiers entre eux ?

1) Division euclidienne

$$462 = 65 \times 7 + 7, \qquad 0 \leq 7 < 65.$$

Le quotient est $q = 7$ et le reste est $r = 7$.

2) Algorithme d'Euclide

$$\begin{aligned} 462 &= 65 \times 7 + 7, \\ 65 &= 7 \times 9 + 2, \\ 7 &= 2 \times 3 + 1, \\ 2 &= 1 \times 2 + 0. \end{aligned}$$

Le dernier reste non nul est 1 ; ainsi

$$\boxed{\text{pgcd}(462, 65) = 1.}$$

3) Calcul du PPCM

Pour deux entiers non nuls a, b, $\text{pgcd}(a, b)\,\text{ppcm}(a, b) = |ab|$.

Par conséquent,

$$\operatorname{ppcm}(462, 65) = \frac{462 \times 65}{1} = 30030.$$

4) Entiers premiers entre eux

Puisque leur PGCD vaut 1, les entiers 462 et 65 sont premiers entre eux.

$$\boxed{q = 7, \quad r = 7, \quad \operatorname{pgcd}(462, 65) = 1, \quad \operatorname{ppcm}(462, 65) = 30030.}$$

Exercice 2 : Divisibilité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si un entier divise à la fois $15n + 4$ et $10n + 3$, alors il divise 5.

Combinaison linéaire

Soit $d \in \mathbb{Z}$ tel que $d \mid 15n + 4$ et $d \mid 10n + 3$. Il divise toute combinaison linéaire entière de ces deux nombres. Or

$$3(10n + 3) - 2(15n + 4) = 30n + 9 - 30n - 8 = 1.$$

Donc $d \mid 1$, d'où $d \in \{-1, 1\}$. En particulier, $d \mid 5$.

On obtient même $\operatorname{pgcd}(15n + 4, 10n + 3) = 1$. La démonstration reste valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Partie 2 : Théorèmes de Bézout et de Gauss

Exercice 3 : Identité de Bézout et Euclide étendu

On considère l'équation

$$37u + 11v = 1, \qquad (u, v) \in \mathbb{Z}^2.$$

1. Justifier pourquoi cette équation admet des solutions entières.
2. À l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu, trouver une solution particulière (u_0, v_0).

1) Existence de solutions entières

L'algorithme d'Euclide donne

$$37 = 3 \times 11 + 4, \qquad 11 = 2 \times 4 + 3, \qquad 4 = 3 + 1, \qquad 3 = 3 \times 1.$$

Donc $\operatorname{pgcd}(37, 11) = 1$. Le théorème de Bézout assure l'existence de $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $37u + 11v = 1$.

2) Remontée de l'algorithme

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 3 \\ &= 4 - (11 - 2 \times 4) \\ &= 3 \times 4 - 11 \\ &= 3(37 - 3 \times 11) - 11 \\ &= 3 \times 37 - 10 \times 11. \end{aligned}$$

Une solution particulière est

$$\boxed{(u_0, v_0) = (3, -10).}$$

En effet, $37 \times 3 + 11 \times (-10) = 111 - 110 = 1$.

Exercice 4 : Équation diophantienne et Gauss

On cherche à résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$(E) : \quad 37x + 11y = 5.$$

1. En utilisant l'exercice précédent, donner une solution particulière (x_0, y_0) de (E).
2. Soit (x, y) une solution quelconque. Montrer que $37(x - x_0) = -11(y - y_0)$.
3. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer la forme générale des solutions de (E).

1) Solution particulière

En multipliant l'identité $37 \times 3 + 11 \times (-10) = 1$ par 5,

$$37 \times 15 + 11 \times (-50) = 5.$$

On peut donc prendre $(x_0, y_0) = (15, -50)$.

2) Différence de deux solutions

En soustrayant $37x_0 + 11y_0 = 5$ de $37x + 11y = 5$, on obtient

$$37(x - x_0) + 11(y - y_0) = 0,$$

c'est-à-dire $37(x - x_0) = -11(y - y_0)$.

3) Ensemble des solutions

L'égalité précédente implique $11 \mid 37(x - x_0)$. Comme $\operatorname{pgcd}(11, 37) = 1$, le théorème de Gauss donne $11 \mid x - x_0$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x = 15 + 11k.$$

En remplaçant, on trouve $37 \times 11k = -11(y + 50)$, donc $y = -50 - 37k$. Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$37(15 + 11k) + 11(-50 - 37k) = 555 - 550 = 5.$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(15 + 11k, -50 - 37k) : k \in \mathbb{Z}\}.}$$

Partie 3 : Congruences et petit théorème de Fermat

Exercice 5 : Calculs modulaires

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2023 par 5.
2. Montrer que $13 \equiv -1 \pmod 7$. En déduire le reste de la division euclidienne de 13^{2024} par 7.

1) Reste modulo 5

$$2023 = 5 \times 404 + 3, \qquad 0 \leq 3 < 5.$$

Le reste est donc $\boxed{3}$.

2) Puissance modulo 7

Puisque $13 - (-1) = 14 = 2 \times 7$, on a $13 \equiv -1 \pmod 7$. La compatibilité de la congruence avec les puissances donne

$$13^{2024} \equiv (-1)^{2024} \equiv 1 \pmod 7.$$

Comme $0 \leq 1 < 7$, le reste est $\boxed{1}$.

Exercice 6 : Petit théorème de Fermat

Soit $p = 11$, qui est un nombre premier.

1. Calculer 3^{10} modulo 11.
2. En déduire sans calculatrice le reste de la division euclidienne de 3^{2025} par 11.
3. Trouver l'inverse de $\overline{4}$ dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

1) Application du petit théorème de Fermat

Comme 11 est premier et $\text{pgcd}(3, 11) = 1$,

$$\boxed{3^{10} \equiv 1 \pmod{11}.}$$

2) Réduction de l'exposant

On écrit $2025 = 202 \times 10 + 5$. Alors

$$3^{2025} = (3^{10})^{202} 3^5 \equiv 3^5 \pmod{11}.$$

Or $3^5 = 243 = 22 \times 11 + 1$, donc

$$\boxed{3^{2025} \equiv 1 \pmod{11}.}$$

Le reste recherché est 1.

3) Inverse de la classe de 4

On a $4 \times 3 = 12 \equiv 1 \pmod{11}$, donc

$$\boxed{\overline{4}^{-1} = \overline{3} \quad \text{dans } \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}.}$$

Partie 4 : Primalité et fonction d'Euler

Exercice 7 : Décomposition et diviseurs

Soit l'entier $n = 360$.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de n.
2. Déterminer le nombre de diviseurs positifs de n, puis le nombre de ses diviseurs dans $\mathbb{Z}$.

1) Décomposition en facteurs premiers

$$360 = 36 \times 10 = (2^2 \times 3^2)(2 \times 5) = \boxed{2^3 \times 3^2 \times 5}.$$

2) Nombre de diviseurs

Un entier positif d divise 360 si et seulement s'il s'écrit de manière unique

$$d = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma, \qquad 0 \le \alpha \le 3, \quad 0 \le \beta \le 2, \quad 0 \le \gamma \le 1.$$

Il y a 4 choix pour α, 3 pour β et 2 pour γ. Ainsi le nombre de diviseurs positifs est $4 \times 3 \times 2 = 24$. Chaque diviseur positif fournit un diviseur négatif distinct ; 0 ne peut pas diviser 360.

$$\boxed{\text{24 diviseurs positifs,} \qquad \text{48 diviseurs dans } \mathbb{Z}.}$$

Exercice 8 : Fonction indicatrice d'Euler

Pour $n \ge 2$, la fonction indicatrice d'Euler $\varphi(n)$ compte les entiers a tels que $1 \le a < n$ et $\text{pgcd}(a, n) = 1$.

1. Calculer $\varphi(13)$.
2. Calculer $\varphi(10)$.
3. Sachant que, si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ est la décomposition de n en facteurs premiers distincts, alors

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right),$$

calculer $\varphi(360)$.

1) Cas d'un nombre premier

Les entiers $1, 2, \ldots, 12$ sont tous premiers avec 13. Donc

$$\boxed{\varphi(13) = 13 - 1 = 12.}$$

2) Calcul de la fonction d'Euler en 10

Parmi $1, 2, \ldots, 9$, les entiers premiers avec 10 sont exactement $1, 3, 7, 9$. Ainsi

$$\boxed{\varphi(10) = 4.}$$

On retrouve ce résultat avec $10 = 2 \times 5$: $\varphi(10) = 10(1 - 1/2)(1 - 1/5) = 4$.

3) Calcul de la fonction d'Euler en 360

Comme $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, les nombres premiers distincts qui le divisent sont $2, 3, 5$. La formule donne

$$\begin{aligned}\varphi(360) &= 360\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) \\ &= 360 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 96.\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi(13) = 12, \qquad \varphi(10) = 4, \qquad \varphi(360) = 96.}$$

Prof : Mohamed Najib LAATABI
najib.laatabi@um5r.ac.ma