UNIVERSITÉ MOHAMMED V
FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT
Département de Mathématiques

Licence 1 – Sciences Mathématiques

Algèbre II

CHAPITRE 3

Fractions rationnelles

Définitions, pôles et décomposition en éléments simples

Prof. Mohamed Najib LAATABI

Toute remarque de votre part est la bienvenue.
Si vous identifiez une erreur, veuillez la signaler.

najib.laatabi@um5r.ac.ma

mohamednajiblaatabi.com

Année universitaire : **2025–2026**

Table des matières

Notations et mode d'emploi **ii**

3 Fractions rationnelles **1**

3.1 Construction du corps des fractions rationnelles 1
3.2 Formes irréductibles, degré et partie entière 3
3.3 Fonctions rationnelles, zéros et pôles 5
3.4 Préliminaires à la décomposition en éléments simples 7
3.5 Théorème de décomposition en éléments simples 9
3.6 Éléments simples sur $\mathbb{C}$ 11
3.7 Éléments simples sur $\mathbb{R}$ 14
3.8 Méthodes efficaces et exemples détaillés 16
3.9 Dérivation des fractions rationnelles 18
3.10 Applications et prolongements 19

Bibliographie **22**

Notations et mode d'emploi

Notation	Signification
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Ensembles usuels des nombres naturels, entiers, rationnels, réels et complexes.
$K,\ K^\times$	Corps commutatif des coefficients ; ensemble des éléments non nuls de K.
$K[X],\ K(X)$	Anneau des polynômes ; corps des fractions rationnelles sur K.
$F = P/Q$	Fraction rationnelle, avec $P, Q \in K[X]$ et $Q \neq 0$.
$\deg F$	Degré de $F \neq 0$: $\deg P - \deg Q$; $\deg 0 = -\infty$.
$\operatorname{pgcd}(P, Q)$	PGCD unitaire de P et Q.
$E + R/Q$	Partie entière et partie propre ($\deg R < \deg Q$).
$\pi \in K[X]$	Polynôme irréductible unitaire (en général).
$\operatorname{ord}_a(F)$	Ordre d'annulation de F au point $a \in K$.
$\operatorname{ord}_\pi(F)$	Exposant de π au numérateur moins celui au dénominateur.
$\mathcal{D}_K(F)$	Ensemble des points du corps K où une expression réduite de F est définie.
F', P'	Dérivée formelle d'une fraction rationnelle ou d'un polynôme.
$\operatorname{Res}_a(F)$	Coefficient de $(X-a)^{-1}$ dans la décomposition en éléments simples (pour $K = \mathbb{C}$).
$\mathbb{F}_p$	Corps fini $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un nombre premier p.

Conventions de lecture

Dans tout ce chapitre, K désigne un **corps commutatif**. Une fraction est un *élément de* $K(X)$, non une simple expression : les représentants P/Q et PR/QR sont égaux si $R \neq 0$. Les résultats utilisant le théorème fondamental de l'algèbre sont formulés sur $\mathbb{C}$; les formules avec des factorielles au dénominateur supposent **la caractéristique nulle**. Les démonstrations sont données, sauf lorsqu'un résultat est expressément annoncé comme admis.

Chapitre 3

Fractions rationnelles

Au chapitre 2, nous avons étudié l'anneau $K[X]$, sa division euclidienne, les polynômes irréductibles et le théorème de Bézout. Ces outils permettent de construire un corps contenant $K[X]$, dans lequel tout polynôme non nul possède un inverse : le **corps des fractions rationnelles** $K(X)$. Son étude conduit à deux questions fondamentales : comment reconnaître deux écritures d'une même fraction, et comment exprimer une fraction sous forme d'une somme de termes simples ?

Nous suivons la progression algébrique du cours Exo7 [1], en nous appuyant sur les méthodes de divisibilité présentées au chapitre 2 ; pour les prolongements, voir Godement [2] et Perrin [3].

3.1 Construction du corps des fractions rationnelles

3.1.1 Fractions formelles et relation d'équivalence

Définition 3.1.1: Fractions rationnelles sur K

Soit K un corps commutatif. Sur l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(P, Q) \in K[X] \times K[X] : Q \neq 0\},$$

on définit la relation

$$(P, Q) \sim (R, S) \quad \Longleftrightarrow \quad PS = RQ.$$

Une **fraction rationnelle** est une classe d'équivalence pour cette relation. La classe de (P, Q) est notée P/Q ; l'ensemble des classes est noté $K(X)$.

Proposition 3.1.1: La relation de fractions est une équivalence

La relation $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive.

Démonstration. La réflexivité vient de $PQ = PQ$, et la symétrie de la symétrie de l'égalité. Si $(P, Q) \sim (R, S)$ et $(R, S) \sim (U, V)$, alors $PS = RQ$ et $RV = US$, d'où

$$PSV = RQV = USQ.$$

On obtient $S(PV - UQ) = 0$. Puisque $S \neq 0$ et que $K[X]$ est intègre, $PV = UQ$: la relation est transitive. ■

Remarque 1: Ne pas confondre fraction et écriture

L'expression $(X^2-1)/(X-1)$ représente la même fraction rationnelle que $X+1$, car $(X^2-1)=(X-1)(X+1)$. Dans le corps $K(X)$, la simplification est une égalité algébrique ; elle ne repose pas sur le choix d'une valeur numérique de X.

3.1.2 Opérations et structure de corps

Définition 3.1.2: Somme et produit

Pour $P/Q, R/S \in K(X)$, on définit

$$\frac{P}{Q}+\frac{R}{S}=\frac{PS+RQ}{QS}, \qquad \frac{P}{Q}\cdot\frac{R}{S}=\frac{PR}{QS}.$$

On pose $0=0/1$ et $1=1/1$.

Proposition 3.1.2: Indépendance des représentants

Les opérations précédentes sont bien définies : remplacer P/Q et R/S par des représentants équivalents ne change ni leur somme ni leur produit dans $K(X)$.

Démonstration. Supposons $P/Q = P_1/Q_1$ et $R/S = R_1/S_1$. Les identités $PQ_1 = P_1Q$ et $RS_1 = R_1S$ donnent

$$(PR)Q_1S_1 = (P_1R_1)QS.$$

Pour la somme, multiplions le numérateur $PS+RQ$ par Q_1S_1 :

$$(PS+RQ)Q_1S_1 = P_1QSS_1 + R_1SQQ_1 = (P_1S_1+R_1Q_1)QS,$$

ce qui établit l'égalité des classes. ■

Théorème 3.1.1: Le corps $K(X)$

L'ensemble $K(X)$, muni des opérations précédentes, est un **corps commutatif**. L'application

$$\iota : K[X] \longrightarrow K(X), \qquad P \longmapsto \frac{P}{1}$$

est un morphisme injectif d'anneaux. Tout élément non nul P/Q a pour inverse Q/P.

Démonstration. L'associativité, la commutativité et la distributivité proviennent des identités correspondantes dans $K[X]$, après mise au même dénominateur. Les neutres sont $0/1$ et $1/1$, et l'opposé de P/Q est $(-P)/Q$. Si $P/Q \neq 0$, alors $P \neq 0$, car $P/Q = 0/1$ équivaut à $P=0$. Par conséquent, Q/P est une fraction admissible, et $(P/Q)(Q/P)=1$. Enfin $P/1 = R/1$ entraîne $P=R$; l'injection est démontrée. ■

Exemple 1: Calcul d'une somme et d'un inverse

Dans $\mathbb{Q}(X)$,

$$\frac{1}{X-1}+\frac{2}{X+1}=\frac{(X+1)+2(X-1)}{X^2-1}=\frac{3X-1}{X^2-1}.$$

L'inverse de $(X+2)/(X^2+1)$ est $(X^2+1)/(X+2)$.

3.1.3 Le plus petit corps contenant $K[X]$

Proposition 3.1.3: Propriété de génération

Tout sous-corps de $K(X)$ contenant $K[X]$ est égal à $K(X)$. Autrement dit, $K(X)$ est le plus petit corps contenant $K[X]$.

Démonstration. Soit L un tel sous-corps. Pour $Q \in K[X]$ non nul, on a $Q \in L$, donc $Q^{-1} \in L$. Ainsi, pour chaque fraction P/Q, $P\,Q^{-1} \in L$. Toutes les fractions rationnelles appartiennent à L. ■

3.2 Formes irréductibles, degré et partie entière

3.2.1 Réduction d'une fraction rationnelle

Définition 3.2.1: Représentation irréductible

Une écriture $F = P/Q$, avec $Q \neq 0$, est dite **irréductible** si

$$\operatorname{pgcd}(P, Q) = 1.$$

On appelle **forme réduite normalisée** une écriture irréductible pour laquelle le dénominateur Q est unitaire.

Théorème 3.2.1: Existence et unicité de la forme normalisée

Toute fraction non nulle $F \in K(X)$ possède une unique écriture

$$F = \frac{P}{Q}, \qquad \operatorname{pgcd}(P, Q) = 1, \quad Q \text{ unitaire.}$$

La fraction nulle possède la représentation normalisée $0/1$.

Démonstration. **Existence.** Pour $F = A/B$, soit $D = \operatorname{pgcd}(A, B)$. On écrit $A = DP_0$ et $B = DQ_0$, avec $\operatorname{pgcd}(P_0, Q_0) = 1$. En divisant numérateur et dénominateur par le coefficient dominant de Q_0, on obtient un dénominateur unitaire.

Unicité. Supposons $P/Q = R/S$, les deux écritures étant irréductibles et les deux dénominateurs unitaires. Alors $PS = RQ$. Comme $\operatorname{pgcd}(P, Q) = 1$, le lemme de Gauss donne $Q \mid S$; de même $S \mid Q$. Les polynômes Q et S sont associés, donc égaux puisqu'ils sont unitaires. L'identité $PS = RQ$ fournit ensuite $P = R$. Le cas $F = 0$ découle immédiatement de $P = 0$ et $Q = 1$. ■

Exemple 2: Réduction et normalisation

Dans $\mathbb{Q}(X)$, on a

$$\frac{2X^2 - 2}{4X^2 - 8X + 4} = \frac{2(X-1)(X+1)}{4(X-1)^2} = \frac{(X+1)/2}{X-1}.$$

La dernière écriture est irréductible et son dénominateur est unitaire.

3.2.2 Degré d'une fraction rationnelle

Définition 3.2.2: Degré dans $K(X)$

Si $F = P/Q \neq 0$, on pose

$$\deg F = \deg P - \deg Q \in \mathbb{Z}.$$

On convient que $\deg 0 = -\infty$.

Proposition 3.2.1: Les règles du degré

Le degré ne dépend pas du représentant de F. Pour $F, G \in K(X)$,

$$\deg(FG) = \deg F + \deg G, \qquad \deg(F+G) \leq \max(\deg F, \deg G),$$

avec égalité dans la seconde formule si $\deg F \neq \deg G$. La première égalité s'entend pour $F, G \neq 0$; pour une somme nulle, la convention $\deg 0 = -\infty$ s'applique.

Démonstration. Si $P/Q = R/S \neq 0$, alors $PS = RQ \neq 0$. La formule du degré du produit donne $\deg P + \deg S = \deg R + \deg Q$, soit $\deg P - \deg Q = \deg R - \deg S$. Le produit se traite de la même manière. Enfin

$$F + G = \frac{PS + RQ}{QS},$$

et $\deg(PS + RQ) \leq \max(\deg P + \deg S, \deg R + \deg Q)$. Si $\deg F \neq \deg G$, les degrés de PS et RQ sont distincts, et le terme de plus haut degré ne peut s'annuler. ■

Remarque 2: Degré négatif

Contrairement à un polynôme non nul, une fraction rationnelle peut avoir un degré négatif. Par exemple $\deg\big((X+1)/(X^3+1)\big) = -2$, même si cette écriture n'est pas irréductible.

3.2.3 Division et partie entière

Définition 3.2.3: Fraction propre et partie entière

Une fraction R/Q est **propre** (ou *élément strictement fractionnaire*) si $R = 0$ ou $\deg R < \deg Q$.

Théorème 3.2.2: Décomposition polynomiale et partie propre

Toute fraction rationnelle $F = P/Q$, avec $Q \neq 0$, admet une écriture

$$\boxed{F = E + \frac{R}{Q}, \qquad \deg R < \deg Q \text{ ou } R = 0,}$$

où $E, R \in K[X]$. Pour le dénominateur fixé Q, les polynômes E, R sont uniques. Le polynôme E ne dépend même pas du représentant choisi pour F : c'est la **partie entière** de F.

Démonstration. La division euclidienne de P par Q donne un unique couple E, R tel que $P = EQ + R$ et $\deg R < \deg Q$ ou $R = 0$. En divisant par Q, on obtient la forme souhaitée. Si $F = E + H = E_1 + H_1$ avec H, H_1 propres, alors $E - E_1 = H_1 - H$. Le membre de droite, s'il est non nul, a un degré strictement négatif, alors que le membre de gauche est un polynôme non nul et possède un degré positif ou nul. Il est donc nécessaire que $E = E_1$ et $H = H_1$, ce qui prouve également l'indépendance du représentant. ■

Exemple 3: Extraire la partie entière

Effectuons la division de $X^4 + 1$ par $X^2 - 1$:

$$X^4 + 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1) + 2.$$

Ainsi,

$$\frac{X^4+1}{X^2-1} = \underbrace{X^2+1}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\frac{2}{X^2-1}}_{\text{partie propre}}.$$

3.3 Fonctions rationnelles, zéros et pôles

3.3.1 Évaluation et domaine naturel

Définition 3.3.1: Fonction rationnelle associée

Soit $F = P/Q$ une fraction sous forme irréductible. On lui associe la fonction

$$\widetilde{F} : \mathcal{D}_K(F) \longrightarrow K, \qquad x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad \mathcal{D}_K(F) = \{x \in K : Q(x) \neq 0\}.$$

Le domaine ainsi défini est indépendant de la forme irréductible utilisée.

Remarque 3: Domaines apparents et simplification

L'expression $(X^2 - 1)/(X - 1)$ n'est pas évaluable telle quelle en 1, mais elle représente dans $K(X)$ le polynôme $X + 1$. Sa fonction rationnelle associée à la *forme irréductible* est donc définie en 1. Il faut distinguer le domaine de l'expression initiale et celui de la fraction rationnelle réduite.

Proposition 3.3.1: Les opérations sont respectées par l'évaluation

Soient $F, G \in K(X)$ et $a \in \mathcal{D}_K(F) \cap \mathcal{D}_K(G)$. On a $(F + G)(a) = F(a) + G(a)$ et $(FG)(a) = F(a)G(a)$; pour $F(a) \neq 0$, $(1/F)(a) = 1/F(a)$.

Démonstration. Choisissons des expressions $F = P/Q$ et $G = R/S$ réduites. En a, les dénominateurs $Q(a)$ et $S(a)$ sont non nuls. Les identités s'obtiennent à partir des règles de calcul des fractions dans le corps K. Les éventuelles simplifications ne changent pas les valeurs ainsi obtenues. ■

3.3.2 Ordres d'annulation et pôles

Définition 3.3.2: Ordre d'une fraction en un point

Soit $F = P/Q \neq 0$ sous forme irréductible et soit $a \in K$. On note $m_a(P)$ la multiplicité de a comme racine de P (zéro si $P(a) \neq 0$) et l'on définit

$$\boxed{\operatorname{ord}_a(F) = m_a(P) - m_a(Q).}$$

Lorsque cet entier est positif, a est un **zéro** d'ordre $\operatorname{ord}_a(F)$; lorsqu'il est négatif, a est un **pôle** d'ordre $-\operatorname{ord}_a(F)$; lorsqu'il vaut zéro, F est régulière et non nulle en a.

Proposition 3.3.2: Caractère intrinsèque de l'ordre

La valeur $\operatorname{ord}_a(F)$ est indépendante du représentant P/Q. Pour $F, G \neq 0$,

$$\operatorname{ord}_a(FG) = \operatorname{ord}_a(F) + \operatorname{ord}_a(G),$$

et, si $F + G \neq 0$,

$$\operatorname{ord}_a(F+G) \geq \min\Big(\operatorname{ord}_a(F), \operatorname{ord}_a(G)\Big).$$

Démonstration. Si $P/Q = R/S$, alors $PS = RQ$. Comme la multiplicité en a est additive sur les produits de polynômes, on a $m_a(P) + m_a(S) = m_a(R) + m_a(Q)$, d'où l'invariance. L'égalité sur les produits suit de la même additivité. Enfin $F + G = (PS + RQ)/(QS)$, et la multiplicité d'une somme de polynômes est supérieure ou égale au minimum de celles des termes. ■

Exemple 4: Lire l'ordre sur une factorisation

Pour

$$F = \frac{(X-1)^3(X+2)}{(X+1)^2(X-3)},$$

on a $\operatorname{ord}_1(F) = 3$ et $\operatorname{ord}_{-2}(F) = 1$: ce sont des zéros. Les points -1 et 3 sont des pôles d'ordres respectifs 2 et 1. En tout autre $a \in \mathbb{R}$, l'ordre vaut 0.

Corollaire 3.3.1: Un pôle est une racine du dénominateur réduit

Si $F = P/Q$ est irréductible, a est un pôle de F si et seulement si $Q(a) = 0$. Son ordre est alors la multiplicité de a dans Q.

Démonstration. Lorsque $Q(a) = 0$, la condition $\operatorname{pgcd}(P, Q) = 1$ entraîne $P(a) \neq 0$, car $X - a$ ne peut diviser les deux polynômes. Ainsi $\operatorname{ord}_a(F) = -m_a(Q)$. La réciproque est immédiate. ■

Définition 3.3.3: Ordre le long d'un facteur irréductible

Pour $\pi \in K[X]$ irréductible unitaire et $F = P/Q \neq 0$, on note $v_\pi(P)$ (resp. $v_\pi(Q)$) l'exposant de π dans la factorisation de P (resp. Q), avec $v_\pi(1) = 0$. L'**ordre le long de** π est

$$\mathrm{ord}_\pi(F) = v_\pi(P) - v_\pi(Q).$$

Il ne dépend pas du représentant choisi. Si $\pi = X - a$, on retrouve $\mathrm{ord}_a(F)$. Un facteur quadratique irréductible peut ainsi contribuer au dénominateur sur $\mathbb{R}$ sans produire de pôle réel.

3.3.3 Comportement au voisinage d'un pôle réel

Proposition 3.3.3: Écriture locale autour d'un pôle

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ possédant un pôle d'ordre $m \geq 1$ en $a \in \mathbb{R}$. Il existe des polynômes $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $U(a)V(a) \neq 0$ et

$$F(X) = \frac{U(X)}{(X-a)^m V(X)}.$$

En particulier,

$$\lim_{x \to a} (x-a)^m F(x) = \frac{U(a)}{V(a)} \neq 0.$$

Démonstration. Dans une forme irréductible P/Q, écrivons $Q = (X-a)^m V$. Comme Q a une racine de multiplicité exactement m, $V(a) \neq 0$; l'irréductibilité impose $P(a) \neq 0$. On prend $U = P$. La limite résulte de la continuité des fonctions polynomiales et de la non-nullité de $V(a)$. ■

Remarque 4: Pôle d'ordre pair ou impair

Le facteur régulier U/V conserve un signe constant près de a. Si m est pair, les deux limites unilatérales ont le même signe infini ; si m est impair, elles ont des signes opposés. Cela donne les asymptotes verticales sans calcul compliqué.

3.4 Préliminaires à la décomposition en éléments simples

3.4.1 Factorisation du dénominateur

Théorème 3.4.1: Factorisation du dénominateur réduit

Soit $F = P/Q \in K(X)$ non nulle, représentée par une fraction irréductible dont le dénominateur est unitaire. Il existe des polynômes irréductibles unitaires distincts $\pi_1, \dots, \pi_r$ et des entiers $m_1, \dots, m_r \geq 1$ tels que

$$\boxed{Q = \prod_{i=1}^{r} \pi_i^{m_i}.}$$

Cette factorisation est unique à l'ordre des facteurs près.

Démonstration. Il s'agit du théorème de factorisation unique dans $K[X]$ démontré au chapitre 2. L'hypothèse « unitaire » fixe le coefficient multiplicatif global. ■

Exemple 5: Des facteurs qui dépendent du corps

Le dénominateur $Q = X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, alors que

$$Q = (X - i)(X + i) \qquad \text{dans } \mathbb{C}[X].$$

La forme des éléments simples dépend donc du corps de coefficients.

3.4.2 Dénominateurs premiers entre eux

Lemme 3.4.1: Séparation de deux dénominateurs

Soient $A, B \in K[X]$ non nuls et premiers entre eux. Pour tout $P \in K[X]$, il existe $U, V \in K[X]$ tels que

$$\frac{P}{AB} = \frac{U}{A} + \frac{V}{B}.$$

Si $\deg P < \deg(AB)$, on peut imposer $\deg U < \deg A$ et $\deg V < \deg B$; ces deux numérateurs sont alors uniques.

Démonstration. Par Bézout, il existe $S, T \in K[X]$ tels que $SA + TB = 1$. En multipliant par $P/(AB)$, on obtient

$$\frac{P}{AB} = \frac{PT}{A} + \frac{PS}{B}.$$

Divisons PT par A : $PT = AE + U$ avec $\deg U < \deg A$. Alors la fraction vaut $U/A + (PS + EB)/B$. Le deuxième numérateur possède un reste V modulo B ; une partie polynomiale éventuelle a un degré négatif puisque $\deg P < \deg AB$, donc elle est nulle. L'unicité suit de $UB + VA = U'B + V'A$: en réduisant modulo A, $(U - U')B \equiv 0 \pmod{A}$. Comme B est inversible modulo A, $A \mid (U - U')$; la condition sur le degré impose $U = U'$ puis $V = V'$. ■

Remarque 5: Pourquoi la condition de degré est nécessaire

Sans les conditions $\deg U < \deg A$ et $\deg V < \deg B$, la séparation n'est pas unique : pour tout $H \in K[X]$, on peut remplacer U par $U + AH$ et V par $V - BH$.

Proposition 3.4.1: Coprimalité des puissances

Si A et B sont premiers entre eux et si $m, n \geq 1$, alors A^m et B^n sont premiers entre eux.

Démonstration. Un polynôme irréductible divisant simultanément A^m et B^n diviserait A et B par le lemme d'Euclide ; cela contredirait $\gcd(A, B) = 1$. Aucun irréductible non constant n'est donc commun aux deux puissances. ■

3.4.3 Développement selon les puissances d'un polynôme

Proposition 3.4.2: Écriture en base π

Soit $\pi \in K[X]$ un polynôme de degré $d \geq 1$ et soit $m \geq 1$. Tout polynôme B vérifiant $\deg B < md$ admet une écriture unique

$$B = A_1\pi^{m-1} + A_2\pi^{m-2} + \cdots + A_m, \qquad \deg A_j < d.$$

Démonstration. Divisons B par π : $B = \pi B_1 + A_m$, avec $\deg A_m < d$. Puis divisons B_1 par π, et ainsi de suite. La condition $\deg B < md$ garantit que le dernier quotient après m divisions est nul. L'unicité résulte, de proche en proche, de l'unicité du reste et du quotient dans chaque division euclidienne. ■

Exemple 6: Puissances d'un facteur linéaire

Dans $\mathbb{Q}[X]$, écrivons $B = 3X^2 + X + 1$ selon les puissances de $\pi = X - 1$. Comme $X = \pi + 1$,

$$3X^2 + X + 1 = 3\pi^2 + 7\pi + 5.$$

En divisant par π^3, on retrouve la somme de trois éléments simples $3/\pi + 7/\pi^2 + 5/\pi^3$.

3.5 Théorème de décomposition en éléments simples

3.5.1 Énoncé général sur un corps

Théorème 3.5.1: Existence et unicité des éléments simples

Soit $F = P/Q \in K(X)$, et supposons $Q = \prod_{i=1}^{r} \pi_i^{m_i}$, où les π_i sont irréductibles, unitaires et deux à deux distincts. Alors il existe une **unique** écriture

$$\boxed{F = E + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{i,j}}{\pi_i^j}, \qquad \deg A_{i,j} < \deg \pi_i,}$$

où $E \in K[X]$ est la partie entière de F et $A_{i,j} \in K[X]$. On autorise $A_{i,j} = 0$. On parle de **décomposition en éléments simples** de F sur K.

Démonstration. **Étape 1 – Écarter la partie entière.** Par division euclidienne, on écrit de manière unique $F = E + R/Q$ avec $\deg R < \deg Q$ ou $R = 0$. Il suffit de traiter R/Q.

Étape 2 – Séparer les facteurs irréductibles. Posons $D_i = \pi_i^{m_i}$ et $T_i = Q/D_i$. Comme les facteurs D_i sont deux à deux premiers entre eux, $\gcd(D_i, T_i) = 1$. Par Bézout, choisissons $U_i, V_i \in K[X]$ tels que

$$U_i T_i + V_i D_i = 1.$$

Soit B_i le reste de la division de RU_i par D_i. Ainsi $\deg B_i < \deg D_i$, et, modulo D_i,

$$B_i T_i \equiv RU_i T_i \equiv R.$$

Le polynôme $H = R - \sum_{i=1}^{r} B_i T_i$ est donc divisible par chacun des D_i, puis par leur produit Q puisqu'ils sont deux à deux premiers entre eux. Or $\deg R < \deg Q$ et $\deg(B_i T_i) < \deg D_i + \deg T_i = \deg Q$, donc $H = 0$. Il en résulte

$$\frac{R}{Q} = \sum_{i=1}^{r} \frac{B_i}{D_i}.$$

Étape 3 – Décomposer suivant les puissances. D'après la proposition précédente, on écrit de façon unique

$$B_i = A_{i,1}\pi_i^{m_i-1} + \cdots + A_{i,m_i}, \qquad \deg A_{i,j} < \deg \pi_i.$$

Après division par $D_i = \pi_i^{m_i}$, on obtient l'écriture voulue.

Unicité. Supposons que deux familles de numérateurs conviennent. Leur différence fournit une somme nulle d'éléments simples ; pour chaque i, regroupons-les sous la forme C_i/D_i avec $\deg C_i < \deg D_i$. En multipliant par Q, on a $\sum_i C_i T_i = 0$. En réduisant cette identité modulo D_i, on obtient $C_i T_i \equiv 0 \pmod{D_i}$. Bézout permet de simplifier T_i, donc $D_i \mid C_i$; la condition de degré donne $C_i = 0$. Enfin l'unicité de l'écriture selon les puissances de π_i montre que tous les numérateurs correspondants coïncident. ■

Corollaire 3.5.1: Structure des éléments simples

Chaque terme $A_{i,j}/\pi_i^j$ possède un dénominateur qui est une puissance d'un seul irréductible, et un numérateur de degré strictement inférieur à celui de cet irréductible. La somme est unique pour un corps de coefficients et une fraction donnés.

Démonstration. Les conditions sont exactement celles de l'énoncé du théorème ; l'unicité vient de sa démonstration. ■

3.5.2 Méthode de calcul pratique

Méthode générale en quatre étapes

1. **Réduire** P/Q par le PGCD, puis extraire la partie entière par division euclidienne.
2. **Factoriser** le dénominateur en irréductibles sur le corps considéré, avec leurs multiplicités.
3. **Écrire la forme imposée** par le théorème, avec des numérateurs de degrés adéquats.
4. **Déterminer les coefficients** par substitution, multiplication par le dénominateur, calcul modulo une puissance de facteur ou identification des coefficients.

Exemple 7: Décomposition avec deux facteurs simples

Calculons dans $\mathbb{Q}(X)$

$$F = \frac{1}{X(X-1)}.$$

Il existe $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1}, \qquad 1 = a(X-1) + bX.$$

En $X = 0$, on trouve $a = -1$; en $X = 1$, on trouve $b = 1$. Donc

$$\boxed{\frac{1}{X(X-1)} = -\frac{1}{X} + \frac{1}{X-1}.}$$

Remarque 6: Simplifier avant de décomposer

Une expression comme $(X^2-1)/(X-1)^2$ doit d'abord devenir $(X+1)/(X-1)$. Si l'on ne réduit pas, on risque d'attribuer à tort un pôle d'ordre 2 à la fraction, alors que son pôle en 1 est d'ordre 1.

3.6 Éléments simples sur $\mathbb{C}$

3.6.1 Facteurs linéaires et pôles complexes

Théorème 3.6.1: Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$

Toute fraction $F \in \mathbb{C}(X)$ possède une unique représentation

$$\boxed{F = E + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{i,j}}{(X-a_i)^j},}$$

où $E \in \mathbb{C}[X]$, $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{C}$ sont les pôles distincts, m_i est l'ordre du pôle a_i et $c_{i,j} \in \mathbb{C}$. Pour un pôle d'ordre m_i, le coefficient c_{i,m_i} est non nul.

Démonstration. Le théorème fondamental de l'algèbre, admis au chapitre 2, affirme que les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1. Le théorème général donne donc des numérateurs de degré strictement inférieur à 1, c'est-à-dire des constantes complexes. Si $c_{i,m_i} = 0$, le pôle en a_i serait d'ordre au plus $m_i - 1$, contrairement à sa définition. ■

Exemple 8: Deux pôles réels, vus dans $\mathbb{C}$

On retrouve

$$\frac{2}{X^2-1} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1}.$$

Les deux éléments simples correspondent aux pôles 1 et -1, tous deux d'ordre 1.

3.6.2 Coefficients aux pôles simples

Proposition 3.6.1: Formule du coefficient d'un pôle simple

Soit $F = P/Q \in \mathbb{C}(X)$ sous forme irréductible. Si a est une racine simple de Q, le coefficient de $1/(X-a)$ dans la décomposition de F est

$$\boxed{c_a = \lim_{X \to a} (X-a)F(X) = \frac{P(a)}{Q'(a)}.}$$

La notation de limite a ici son sens usuel sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. Puisque a est racine simple, $Q = (X-a)S$ avec $S(a) \neq 0$. La dérivation formelle donne $Q' = S + (X-a)S'$, donc $Q'(a) = S(a)$. La fraction $(X-a)F = P/S$ est définie en a, et sa valeur y est $P(a)/S(a) = P(a)/Q'(a)$. Dans la décomposition en éléments simples, les termes provenant d'autres pôles sont réguliers en a ; après multiplication par $X-a$, ils tendent vers 0. La constante recherchée est donc précisément cette valeur. ■

Définition 3.6.1: Résidu algébrique en un pôle

Dans la décomposition en éléments simples de $F \in \mathbb{C}(X)$, on appelle **résidu algébrique** de F en a le coefficient $\mathrm{Res}_a(F)$ de $1/(X-a)$. Pour un pôle simple, $\mathrm{Res}_a(F) = P(a)/Q'(a)$ lorsque $F = P/Q$ est réduite. Cette définition ne nécessite aucune intégration complexe.

Exemple 9: Trois pôles simples sans identification

Posons

$$F = \frac{1}{(X-1)(X-2)(X+1)}.$$

La formule précédente donne

$$c_1 = \frac{1}{(1-2)(1+1)} = -\frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{(2-1)(2+1)} = \frac{1}{3}, \quad c_{-1} = \frac{1}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{6}.$$

Par conséquent,

$$F = -\frac{1}{2(X-1)} + \frac{1}{3(X-2)} + \frac{1}{6(X+1)}.$$

3.6.3 Pôles multiples et formules de dérivation

Proposition 3.6.2: Coefficient principal d'un pôle multiple

Soit a un pôle de $F = P/Q \in \mathbb{C}(X)$ d'ordre $m \geq 1$. Si $Q = (X-a)^m S$ avec $S(a) \neq 0$, alors le coefficient de $1/(X-a)^m$ dans la décomposition est

$$\boxed{c_m = \frac{P(a)}{S(a)} \neq 0.}$$

Démonstration. Multiplions la décomposition de F par $(X-a)^m$ et évaluons en a. Tous les éléments simples de pôle a d'ordre $j < m$ donnent zéro, et les termes ayant d'autres pôles

sont également annulés. Le terme d'ordre m donne c_m. Par ailleurs $(X-a)^m F = P/S$, d'où la formule. ■

Proposition 3.6.3: Tous les coefficients d'un pôle multiple

Dans les conditions précédentes, posons

$$G(X) = (X-a)^m F(X) = \frac{P(X)}{S(X)}.$$

Pour $0 \leq r \leq m-1$, le coefficient de $(X-a)^{-(m-r)}$ est

$$\boxed{c_{m-r} = \frac{G^{(r)}(a)}{r!}.}$$

Cette formule suppose la caractéristique nulle ; elle s'applique notamment à $K = \mathbb{C}$ ou $K = \mathbb{R}$.

Démonstration. La fraction G est régulière en a. La décomposition en éléments simples de F, multipliée par $(X-a)^m$, s'écrit

$$G(X) = c_m + c_{m-1}(X-a) + \cdots + c_1(X-a)^{m-1} + (X-a)^m H(X),$$

où H est régulière en a et rassemble la partie entière et les contributions des autres pôles. En dérivant $r < m$ fois et en évaluant en a, tous les termes sauf $r!c_{m-r}$ s'annulent. Comme $r! \neq 0$ en caractéristique nulle, on conclut. ■

Remarque 7: Pourquoi préciser la caractéristique ?

Si K a une caractéristique $p > 0$, la division par $r!$ n'est pas autorisée dès que $r \geq p$. Le théorème général de décomposition reste valable ; seule cette méthode de calcul par dérivées ordinaires nécessite une hypothèse supplémentaire.

Exemple 10: Un pôle double

Décomposons

$$F = \frac{2X+3}{(X-1)^2(X+2)}.$$

Écrivons $F = a/(X-1) + b/(X-1)^2 + c/(X+2)$. Le coefficient principal en 1 vaut $b = \left.\frac{2X+3}{X+2}\right|_{X=1} = \frac{5}{3}$. En dérivant $G = (2X+3)/(X+2)$, on détermine $a = G'(1)$:

$$G'(X) = \frac{2(X+2) - (2X+3)}{(X+2)^2} = \frac{1}{(X+2)^2}, \qquad a = \frac{1}{9}.$$

Enfin, en $X = -2$, on obtient $c = \frac{2(-2)+3}{(-2-1)^2} = -\frac{1}{9}$. Donc

$$\boxed{F = \frac{1}{9(X-1)} + \frac{5}{3(X-1)^2} - \frac{1}{9(X+2)}.}$$

3.7 Éléments simples sur $\mathbb{R}$

3.7.1 Polynômes irréductibles réels

Proposition 3.7.1: Classification des irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Les polynômes irréductibles unitaires sur $\mathbb{R}$ sont exactement

1. les polynômes $X - a$ où $a \in \mathbb{R}$;
2. les polynômes $X^2 + uX + v$ où $u, v \in \mathbb{R}$ et $u^2 - 4v < 0$.

Démonstration. Par le théorème fondamental de l'algèbre, un polynôme réel non constant admet une racine complexe. Si elle est réelle, $X - a$ le divise. Sinon, $z = a + ib$ avec $b \neq 0$ est racine, ainsi que $\overline{z} = a - ib$; leur produit

$$(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - 2aX + (a^2 + b^2)$$

est réel, irréductible, et divise le polynôme initial. Un polynôme irréductible réel a donc le degré 1 ou 2. Enfin un polynôme réel unitaire de degré 2 est irréductible si et seulement s'il n'a pas de racine réelle, c'est-à-dire si son discriminant est strictement négatif. ■

3.7.2 Forme des éléments simples réels

Théorème 3.7.1: Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$. Il existe une unique décomposition

$$\boxed{F = E + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j} + \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{b_{k,j}X + c_{k,j}}{(X^2 + u_k X + v_k)^j},}$$

où $E \in \mathbb{R}[X]$, tous les coefficients sont réels, $u_k^2 - 4v_k < 0$, et les facteurs irréductibles sont distincts. Les numérateurs des éléments simples correspondant aux facteurs quadratiques sont de degré inférieur ou égal à 1.

Démonstration. La classification précédente et le théorème général de décomposition en éléments simples conduisent à cette formule. Pour un facteur linéaire de degré 1, un numérateur de degré strictement inférieur à 1 est constant. Pour un irréductible quadratique de degré 2, il est de la forme $bX + c$. L'unicité est celle du théorème général. ■

Exemple 11: Un facteur linéaire et un facteur quadratique

Dans $\mathbb{R}(X)$, on cherche

$$\frac{1}{(X-1)(X^2+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+1}.$$

L'identité des numérateurs est

$$1 = a(X^2+1) + (bX+c)(X-1).$$

En $X=1$, $a=1/2$. L'identification des coefficients donne $b=-1/2$ et $c=-1/2$. Donc

$$\boxed{\frac{1}{(X-1)(X^2+1)} = \frac{1}{2(X-1)} - \frac{X+1}{2(X^2+1)}.}$$

3.7.3 Correspondance avec les pôles complexes conjugués

Proposition 3.7.2: Regroupement de deux éléments conjugués

Pour $z = a+ib \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{C}$, la somme

$$\frac{c}{X-z} + \frac{\overline{c}}{X-\overline{z}}$$

appartient à $\mathbb{R}(X)$ et s'écrit sous la forme

$$\frac{uX+v}{(X-a)^2+b^2}, \qquad u,v \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. En réduisant au même dénominateur, le numérateur vaut

$$c(X-\overline{z}) + \overline{c}(X-z) = 2\,\mathrm{Re}(c)X - 2\,\mathrm{Re}(c\overline{z}),$$

qui possède des coefficients réels. Le dénominateur $(X-z)(X-\overline{z}) = (X-a)^2+b^2$ est irréductible sur $\mathbb{R}$. ■

Exemple 12: Deux écritures de $1/(X^2+1)$

Dans $\mathbb{C}(X)$, les facteurs linéaires donnent

$$\frac{1}{X^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i}\right).$$

Dans $\mathbb{R}(X)$, le dénominateur est irréductible : la fraction est déjà un élément simple réel, de numérateur constant 1.

Remarque 8: Ne pas ajouter inutilement les racines complexes

Pour décomposer une fraction sur $\mathbb{R}$, on ne factorise pas les quadratiques de discriminant négatif. Une décomposition contenant $1/(X-i)$ n'est pas une décomposition sur $\mathbb{R}$: ses coefficients ne sont pas dans le corps demandé.

3.8 Méthodes efficaces et exemples détaillés

3.8.1 Identification après multiplication

Exemple 13: Pôle double et pôle simple par identification

Calculons

$$F = \frac{1}{X^2(X-1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X-1}.$$

Après multiplication par $X^2(X-1)$,

$$1 = aX(X-1) + b(X-1) + cX^2.$$

En $X = 0$, on trouve $b = -1$; en $X = 1$, $c = 1$. En comparant les coefficients de X, on obtient $-a + b = 0$, donc $a = -1$. Finalement,

$$\boxed{\frac{1}{X^2(X-1)} = -\frac{1}{X} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{X-1}.}$$

La reconstitution du numérateur 1 fournit une vérification immédiate.

3.8.2 La méthode de substitution aux racines

Proposition 3.8.1: Formule pratique lorsque Q est scindé simple

Si $F = P/Q$ est propre et si

$$Q = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i) \quad \text{avec } a_i \neq a_j \text{ pour } i \neq j,$$

alors

$$\boxed{\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(a_i)}{Q'(a_i)} \frac{1}{X - a_i}.}$$

Démonstration. Tous les pôles du dénominateur ont un ordre au plus 1. Le théorème sur les éléments simples fournit des coefficients c_i. Par la formule du pôle simple, $c_i = P(a_i)/Q'(a_i)$. Il n'y a pas de partie entière car la fraction est propre. ■

Exemple 14: Un dénominateur à trois facteurs

Dans $\mathbb{Q}(X)$, pour $Q = X(X-1)(X+2)$, on a

$$Q'(0) = -2, \qquad Q'(1) = 3, \qquad Q'(-2) = 6.$$

D'où, sans résoudre de système linéaire,

$$\boxed{\frac{1}{X(X-1)(X+2)} = -\frac{1}{2X} + \frac{1}{3(X-1)} + \frac{1}{6(X+2)}.}$$

3.8.3 Extraire d'abord la partie entière

Exemple 15: Une fraction impropre

Décomposons sur $\mathbb{Q}$ la fraction

$$F = \frac{X^4+1}{X^2-1}.$$

La division euclidienne fournit $F = X^2+1+2/(X^2-1)$. Or $2/(X^2-1) = 1/(X-1) - 1/(X+1)$. Ainsi,

$$\boxed{F = X^2+1+\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X+1}.}$$

La partie entière n'est pas optionnelle : elle est requise par la forme canonique de la décomposition.

3.8.4 Combiner facteurs simples et quadratiques

Exemple 16: Une décomposition mixte sur $\mathbb{R}$

Étudions

$$F = \frac{X^3+2X+3}{(X-1)(X^2+1)}.$$

Le dénominateur est de degré 3, comme le numérateur. La division fournit

$$(X-1)(X^2+1) = X^3 - X^2 + X - 1,$$

donc

$$F = 1 + \frac{X^2+X+4}{(X-1)(X^2+1)}.$$

Écrivons la partie propre sous la forme

$$\frac{X^2+X+4}{(X-1)(X^2+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+1}.$$

Après multiplication par le dénominateur,

$$X^2+X+4 = a(X^2+1) + (bX+c)(X-1).$$

En $X=1$, on trouve $6 = 2a$, donc $a=3$. En identifiant les termes de degré 2 et de degré 0, on obtient $b=-2$ puis $c=-1$. Par conséquent,

$$\boxed{F = 1 + \frac{3}{X-1} - \frac{2X+1}{X^2+1}.}$$

3.8.5 Erreurs de calcul fréquentes

Remarque 9: Trois points à contrôler

1. Si le dénominateur contient $(X-a)^m$, il faut prévoir *toutes* les puissances $1/(X-a), \dots, 1/(X-a)^m$.
2. Si le dénominateur contient un irréductible quadratique $(X^2+uX+v)^m$ sur $\mathbb{R}$, le numérateur générique de chaque terme est $bX+c$, pas une constante imposée d'avance.
3. Si $\deg P \geq \deg Q$, il faut effectuer la division euclidienne *avant* la décomposition de la partie propre.

3.9 Dérivation des fractions rationnelles

3.9.1 La règle du quotient

Théorème 3.9.1: Dérivée formelle dans $K(X)$

Il existe une unique application K-linéaire $F \longmapsto F'$ de $K(X)$ dans $K(X)$ qui coïncide sur $K[X]$ avec la dérivation formelle et qui vérifie la règle du produit $(FG)' = F'G + FG'$. Elle est donnée, pour $Q \neq 0$, par

$$\boxed{\left(\frac{P}{Q}\right)' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}.}$$

Démonstration. La formule est imposée par la règle du produit appliquée à $P = (P/Q)Q$: la dérivée doit satisfaire $P' = (P/Q)'Q + (P/Q)Q'$, d'où l'expression affichée. Vérifions qu'elle ne dépend pas du représentant. Si $P/Q = R/S$, $PS = RQ$ et, après dérivation dans $K[X]$, $P'S + PS' = R'Q + RQ'$. On obtient alors

$$(P'Q - PQ')S^2 = (R'S - RS')Q^2$$

en développant et en utilisant $PS = RQ$; les deux résultats sont donc la même fraction. La linéarité et la règle du produit s'établissent par un calcul au même dénominateur. ■

Exemple 17: Dériver une fraction rationnelle

Pour $F = (X+1)/(X^2+1)$,

$$F' = \frac{(X^2+1) - 2X(X+1)}{(X^2+1)^2} = \frac{-X^2 - 2X + 1}{(X^2+1)^2}.$$

On peut aussi dériver la décomposition en éléments simples, lorsque celle-ci est plus facile.

3.9.2 Dérivée et ordre des pôles

Proposition 3.9.1: Dériver augmente l'ordre d'un pôle

Supposons que $\mathrm{car}(K) = 0$. Si $F \in K(X)$ possède un pôle d'ordre $m \geq 1$ en $a \in K$, alors F' possède un pôle d'ordre $m+1$ en a. Si F a un zéro d'ordre $m \geq 1$ en a, F' a un zéro d'ordre $m-1$ (ordre nul si $m = 1$).

Démonstration. Écrivons $F = (X-a)^e H$, avec $e \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et H régulière et non nulle en a. La règle de dérivation donne

$$F' = e(X-a)^{e-1}H + (X-a)^e H' = (X-a)^{e-1}\Big(eH + (X-a)H'\Big).$$

Comme K est de caractéristique nulle et que $H(a) \neq 0$, le terme entre parenthèses vaut $eH(a) \neq 0$ en a. Ainsi $\mathrm{ord}_a(F') = e-1$. Pour $e = -m$, cela donne un pôle d'ordre $m+1$; pour $e = m > 0$, un zéro d'ordre $m-1$. ■

Remarque 10: Une exception en caractéristique positive

Dans $\mathbb{F}_p(X)$, la dérivée de X^p est nulle. On ne peut donc pas supprimer l'hypothèse de caractéristique nulle du résultat précédent.

Corollaire 3.9.1: Fractions à dérivée nulle en caractéristique nulle

Si $\mathrm{car}(K) = 0$ et $F \in K(X)$, alors

$$F' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F \in K.$$

Démonstration. Écrivons $F = P/Q$ sous forme irréductible. Si $F' = 0$, on a $P'Q = PQ'$. Par le lemme de Gauss, $P \mid P'$ puisque $\mathrm{pgcd}(P, Q) = 1$. Si P est non constant, alors, en caractéristique nulle, $\deg P' = \deg P - 1$, contradiction. Donc P est constant. Si $P = 0$, $F = 0$; sinon $P'Q = PQ'$ implique $Q' = 0$, donc Q est constant en caractéristique nulle. Réciproquement, la dérivée de chaque constante est nulle. ■

3.10 Applications et prolongements

3.10.1 Asymptotes polynomiales à l'infini

Proposition 3.10.1: La partie entière comme asymptote

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ et écrivons $F = E + R/Q$ avec $\deg R < \deg Q$ ou $R = 0$. Alors

$$\lim_{x \to +\infty} \Big(F(x) - E(x)\Big) = \lim_{x \to -\infty} \Big(F(x) - E(x)\Big) = 0.$$

Ainsi, le graphe de $y = E(x)$ est une **asymptote polynomiale** à celui de $y = F(x)$ aux deux infinis.

Démonstration. Si $R = 0$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, si $\deg R = m < \deg Q = n$, on divise le numérateur et le dénominateur par x^n ; tous les termes de $R(x)/x^n$ tendent vers 0, et $Q(x)/x^n$ tend vers le coefficient dominant non nul de Q. Le quotient tend donc vers 0 dans les deux directions. ■

Exemple 18: Une asymptote parabolique

Pour la fraction $F = (X^4+1)/(X^2-1)$,

$$F(X) = X^2 + 1 + \frac{2}{X^2-1}.$$

Le graphe de $y = x^2+1$ est une asymptote polynomiale du graphe de F lorsque $x \to \pm\infty$.

3.10.2 Équations et valeurs interdites

Exemple 19: Résoudre une équation rationnelle

Dans $\mathbb{R}$, considérons l'équation

$$\frac{X+2}{X-1} = \frac{3}{X+1}.$$

On commence par exclure $X = 1$ et $X = -1$. La multiplication par $(X-1)(X+1)$ donne

$$(X+2)(X+1) = 3(X-1) \quad \Longleftrightarrow \quad X^2 + 5 = 0.$$

Il n'existe donc aucune solution réelle. L'exclusion préalable des valeurs interdites évite de confondre l'identité dans $K(X)$ et l'égalité de fonctions en un point.

3.10.3 Primitives : un lien avec l'Analyse II

Sur $\mathbb{R}$, la décomposition en éléments simples sert également au calcul de primitives. Ce prolongement analytique ne modifie pas la nature algébrique des résultats précédents.

Proposition 3.10.2: Primitives des éléments simples linéaires

Sur un intervalle réel ne contenant pas a,

$$\int \frac{c}{x-a}\,dx = c\ln|x-a| + C \qquad (c, a \in \mathbb{R}),$$

et, pour tout entier $m \geq 2$,

$$\int \frac{c}{(x-a)^m}\,dx = -\frac{c}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C.$$

Démonstration. La première formule provient de $(\ln|x-a|)' = 1/(x-a)$; pour $m \geq 2$,

$$\Big((x-a)^{-(m-1)}\Big)' = -(m-1)(x-a)^{-m}.$$

Les formules s'obtiennent en multipliant par les constantes voulues. ■

Proposition 3.10.3: Primitive pour un quadratique irréductible

Soit $q(x) = x^2 + ux + v$ avec $u^2 - 4v < 0$ et posons $\delta = \sqrt{4v - u^2} > 0$. Une primitive réelle de $(ax+b)/q(x)$ est

$$\boxed{\frac{a}{2}\ln q(x) + \frac{2b - au}{\delta}\arctan\!\left(\frac{2x+u}{\delta}\right).}$$

Démonstration. On écrit $ax+b = (a/2)(2x+u) + (b - au/2)$. La primitive du premier terme divisé par q est $(a/2)\ln q(x)$ puisque $q' = 2x+u$ et $q(x) > 0$. De plus, la complétion du carré donne

$$q(x) = \frac{(2x+u)^2 + \delta^2}{4}, \qquad \int \frac{dx}{q(x)} = \frac{2}{\delta}\arctan\left(\frac{2x+u}{\delta}\right) + C.$$

La combinaison des deux formules fournit le résultat. ■

Exemple 20: Une primitive par éléments simples

Sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$, la décomposition

$$\frac{1}{x(x-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

donne comme primitive

$$-\ln|x| + \ln|x-1| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C.$$

De même,

$$\int \frac{3x+1}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + C.$$

Bilan du chapitre

Pour décomposer une fraction rationnelle, on procède dans cet ordre : *simplification par le PGCD, division euclidienne, factorisation irréductible, forme générale des éléments simples, détermination des coefficients, vérification.* Sur $\mathbb{C}$, les dénominateurs élémentaires sont des puissances de $X - a$; sur $\mathbb{R}$, s'ajoutent les puissances des quadratiques irréductibles. L'existence et l'unicité proviennent de Bézout et de la factorisation unique dans $K[X]$.

Bibliographie

[1] **Collectif Exo7.** *Algèbre – Cours de mathématiques, première année*. Cours librement accessible sur la plateforme Exo7.

https://exo7.emath.fr/cours/livre-algebre-1.pdf.

Pour ce chapitre : polynômes, fractions rationnelles, calcul algébrique, division euclidienne et exemples élémentaires.

[2] **Roger Godement.** *Cours d'algèbre*. Hermann, 3^{e} édition.

https://www.editions-hermann.fr/livre/cours-d-algebre-roger-godement.

Pour ce chapitre : construction de corps de fractions, arithmétique des polynômes et unicité des décompositions.

[3] **Daniel Perrin.** *Cours d'algèbre*. Ellipses, 1996.

Pour ce chapitre : divisibilité dans $K[X]$, polynômes irréductibles et outils algébriques associés aux fractions rationnelles.