Corrigé de la Série 2 : Polynômes

Calculs, racines, division, PGCD et factorisation

Énoncés et corrigés détaillés

Consigne. Traiter les exercices en détaillant les calculs et en justifiant chaque résultat. Sauf mention contraire, les polynômes sont à coefficients dans le corps indiqué.

Exercice 1 — Opérations, degrés et composition

Dans $\mathbb{Q}[X]$, on considère

$$P = 2X^3 - X^2 - 2X + 1, \qquad Q = X^2 - 1, \qquad R = (X+1)^2.$$

1) Factoriser P et en déduire toutes ses racines rationnelles.

2) Calculer et factoriser $P+Q$, $P-Q$ et PQ.

3) Préciser les degrés et les coefficients dominants de P, Q et PQ.

4) Calculer $R \circ Q$ et $Q \circ R$. La composition est-elle commutative ?

1) Factorisation et racines

On regroupe les termes :

$$P = X^2(2X-1) - (2X-1) = (2X-1)(X^2-1).$$

Ainsi

$$\boxed{P = (2X-1)(X-1)(X+1), \quad Z_{\mathbb{Q}}(P) = \{-1, \tfrac{1}{2}, 1\}.}$$

2) Calculs dans $\mathbb{Q}[X]$

Puisque $P = (2X-1)Q$, on obtient immédiatement

$$\boxed{P+Q = 2XQ = 2X(X-1)(X+1),}$$

$$\boxed{P-Q = (2X-2)Q = 2(X-1)^2(X+1),}$$

$$\boxed{PQ = (2X-1)(X^2-1)^2.}$$

La factorisation évite des développements inutiles.

3) Degrés et coefficients dominants

Les termes dominants sont $2X^3$, X^2 et $2X^5$. Par conséquent,

$$\boxed{\deg P = 3, \quad \deg Q = 2, \quad \deg(PQ) = 5,} \qquad \boxed{\mathrm{cd}(P) = 2,\ \mathrm{cd}(Q) = 1,\ \mathrm{cd}(PQ) = 2.}$$

On retrouve $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$ et $\mathrm{cd}(PQ) = \mathrm{cd}(P)\mathrm{cd}(Q)$.

4) Composition

D'une part,

$$R \circ Q = (Q+1)^2 = (X^2)^2 = \boxed{X^4}.$$

D'autre part,

$$Q \circ R = R^2 - 1 = \boxed{(X+1)^4 - 1}.$$

Ces deux polynômes sont distincts (celui de droite possède un terme en X^3). La composition n'est donc pas commutative.

Exercice 2 — Division euclidienne, Horner et racines multiples

Soit $A = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

1) Effectuer la division euclidienne de A par $X - 1$.

2) Calculer $A(1)$ et $A'(1)$. Que peut-on en conclure ?

3) Effectuer la division de A par $X^2 + 1$ et factoriser A dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

4) Donner toutes les racines complexes de A avec leur multiplicité.

1) Division par $X - 1$

Le schéma de Horner appliqué aux coefficients $1, -2, 2, -2, 1$ en 1 donne successivement $1, -1, 1, -1, 0$. Ainsi

$$\boxed{A = (X-1)(X^3 - X^2 + X - 1).}$$

Le reste est nul.

2) Une racine au moins double

On a $A(1) = 0$ et

$$A' = 4X^3 - 6X^2 + 4X - 2, \qquad A'(1) = 4 - 6 + 4 - 2 = 0.$$

Le critère des racines multiples montre que 1 est une racine de multiplicité au moins 2.

3) Division par $X^2 + 1$

On vérifie, par division ou multiplication, que

$$\boxed{A = (X^2+1)(X^2 - 2X + 1) = (X^2+1)(X-1)^2.}$$

C'est la décomposition en irréductibles réels : $X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle. Dans $\mathbb{C}[X]$,

$$\boxed{A = (X-1)^2(X-i)(X+i).}$$

4) Racines et multiplicités

Les racines complexes sont 1 (double), i (simple) et $-i$ (simple). La somme des multiplicités vaut $2 + 1 + 1 = 4 = \deg A$.

Exercice 3 — Multiplicité, dérivée et PGCD

Dans $\mathbb{Q}[X]$, on pose $P = (X-1)^3(X+2)^2$.

1) Donner le degré, le coefficient dominant et les racines de P avec leurs multiplicités.

2) Calculer et factoriser la dérivée formelle P'.

3) Déterminer $\operatorname{pgcd}(P, P')$, sous forme unitaire.

4) En déduire les racines multiples et vérifier que $P/\operatorname{pgcd}(P, P')$ est sans racine multiple.

1) Multiplicités

Le polynôme est unitaire de degré $3+2=5$. Sa racine 1 est triple, et sa racine -2 est double.

2) Calcul de la dérivée

Par la règle du produit,

$$\begin{aligned} P' &= 3(X-1)^2(X+2)^2 + 2(X-1)^3(X+2) \\ &= (X-1)^2(X+2)(3(X+2)+2(X-1)). \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{P' = (X-1)^2(X+2)(5X+4).}$$

3) PGCD

Les facteurs $X-1$, $X+2$ et $5X+4$ sont deux à deux non associés. Leur partie commune donne

$$\boxed{\operatorname{pgcd}(P, P') = (X-1)^2(X+2).}$$

Ce polynôme est bien unitaire.

4) Polynôme sans racine multiple

Les facteurs communs à P et P' caractérisent ses racines multiples, à savoir 1 et -2. Par ailleurs,

$$\boxed{\frac{P}{\operatorname{pgcd}(P, P')} = (X-1)(X+2),}$$

qui possède deux racines simples et distinctes. Son PGCD avec sa dérivée est donc 1.

Exercice 4 — Algorithme d'Euclide, Bézout et congruences

Soient $A = X^3 - 1$ et $B = X^2 - 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

1) Exécuter l'algorithme d'Euclide et obtenir le PGCD unitaire D de A et B.

2) Trouver deux polynômes $U, V \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $AU + BV = D$.

3) Déterminer $\operatorname{ppcm}(A, B)$ sous forme factorisée.

4) En posant $A_1 = A/D$ et $B_1 = B/D$, justifier que X est inversible modulo A_1, puis donner un représentant de son inverse.

1) Algorithme d'Euclide

Les divisions donnent

$$A = XB + (X-1), \qquad B = (X+1)(X-1) + 0.$$

Le dernier reste non nul est unitaire :

$$\boxed{D = \operatorname{pgcd}(A, B) = X - 1.}$$

2) Identité de Bézout

La première division fournit directement

$$\boxed{A - XB = X - 1 = D, \quad U = 1,\ V = -X.}$$

3) PPCM

En factorisant

$$A = (X-1)(X^2+X+1), \qquad B = (X-1)(X+1),$$

on trouve

$$\boxed{\operatorname{ppcm}(A, B) = (X-1)(X+1)(X^2+X+1).}$$

C'est aussi AB/D, déjà unitaire.

4) Calcul modulo A_1

On a $A_1 = X^2 + X + 1$ et $B_1 = X + 1$. En divisant l'identité de Bézout par D, il vient

$$1 = A_1 - XB_1 = A_1 - X(X+1).$$

Par conséquent, $X(-X-1) \equiv 1 \pmod{A_1}$:

$$\boxed{X^{-1} \equiv -X - 1 \pmod{X^2+X+1}.}$$

Exercice 5 — Irréductibilité et changement de corps

On considère $P = X^4 + 4$ et $Q = X^3 - 2$.

1) Vérifier l'identité $P = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2)$.

2) Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puis en facteurs de degré un dans $\mathbb{C}[X]$.

3) Prouver que Q est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

4) Expliquer pourquoi Q n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

1) Identité de Sophie Germain

$$(X^2+2)^2 - (2X)^2 = X^4 + 4X^2 + 4 - 4X^2 = X^4 + 4.$$

La différence de deux carrés donne exactement la factorisation annoncée.

2) Facteurs réels et complexes

Les discriminants des deux quadratiques $X^2 \pm 2X + 2$ valent $4 - 8 = -4 < 0$. Ils sont donc irréductibles sur $\mathbb{R}$. Sur $\mathbb{C}$, leurs racines sont $1 \pm i$ et $-1 \pm i$; d'où

$$\boxed{P = (X - 1 - i)(X - 1 + i)(X + 1 - i)(X + 1 + i).}$$

3) Irréductibilité sur $\mathbb{Q}$

Puisque Q est unitaire et à coefficients entiers, toute éventuelle racine rationnelle est un entier diviseur de 2, donc appartient à $\{-2,-1,1,2\}$. Or

$$Q(-2)=-10,\quad Q(-1)=-3,\quad Q(1)=-1,\quad Q(2)=6.$$

Q n'a aucune racine rationnelle. Un polynôme de degré 3 sans racine dans $\mathbb{Q}$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

4) Sur $\mathbb{R}$

Le réel $\alpha=\sqrt[3]{2}$ est racine de Q ; ainsi

$$\boxed{Q=(X-\alpha)(X^2+\alpha X+\alpha^2).}$$

Les deux facteurs sont non constants : Q est réductible sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 — Interpolation de Lagrange et relations de Viète

1) Montrer qu'il existe un unique $P\in\mathbb{Q}_2[X]$ tel que $P(-1)=2$, $P(0)=1$ et $P(1)=4$.

2) Construire P par la formule de Lagrange et l'écrire sous forme développée.

3) En déduire $P(2)$.

4) Déterminer le polynôme unitaire $S\in\mathbb{Q}[X]$ de degré 3 dont les racines sont 1, 2 et 3. Retrouver les trois coefficients non dominants grâce aux relations de Viète.

1) Existence et unicité

Les abscisses $-1,0,1$ sont distinctes. La formule d'interpolation de Lagrange fournit un polynôme de degré au plus 2 ; si deux tels polynômes conviennent, leur différence, de degré au plus 2, possède trois racines distinctes : elle est nulle.

2) Calcul explicite

Les trois polynômes fondamentaux sont

$$L_{-1}=\frac{X(X-1)}{2},\qquad L_0=1-X^2,\qquad L_1=\frac{X(X+1)}{2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}P&=2L_{-1}+L_0+4L_1\\&=X(X-1)+(1-X^2)+2X(X+1).\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{P=2X^2+X+1}$.

3) Évaluation

$$\boxed{P(2)=2\cdot4+2+1=11.}$$

4) Viète

Le polynôme recherché est

$$S=(X-1)(X-2)(X-3)=\boxed{X^3-6X^2+11X-6}.$$

On retrouve $6=1+2+3$, $11=1\cdot2+1\cdot3+2\cdot3$ et $6=1\cdot2\cdot3$. Dans X^3+aX^2+bX+c, les relations de Viète donnent donc $a=-6$, $b=11$, $c=-6$.

Exercice 7 — Polynômes sur le corps fini $\mathbb{F}_5$

Dans cet exercice, $K = \mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $P = X^5 - X$ et $Q = X^2 + 1$.

1) Montrer que tout élément de K est une racine de P.

2) Factoriser P en facteurs irréductibles de $K[X]$.

3) Calculer P' et prouver que les racines de P sont simples.

4) Décomposer Q dans $K[X]$, déterminer $\operatorname{pgcd}(P, Q)$.

1) Évaluation dans $\mathbb{F}_5$

Pour $a = 0$, $a^5 - a = 0$. Pour $a \neq 0$, le groupe multiplicatif $K^\times$ est d'ordre 4, donc $a^4 = 1$; par suite $a^5 = a$. Tous les éléments de K sont donc racines de P.

2) Factorisation

P est unitaire de degré 5 et possède les cinq racines distinctes $0, 1, 2, 3, 4$. Par comparaison des degrés,

$$\boxed{P = X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4) \quad \text{dans } K[X].}$$

3) Dérivation en caractéristique 5

Dans $K[X]$, le coefficient 5 vaut zéro. Par conséquent,

$$\boxed{P' = 5X^4 - 1 = -1.}$$

Ainsi $\operatorname{pgcd}(P, P') = 1$; aucune racine n'est multiple.

4) PGCD et quotient

Les éléments 2 et $3 = -2$ sont les racines de Q, car $2^2 + 1 = 3^2 + 1 = 0$ dans K. Donc

$$Q = (X-2)(X+2), \qquad \boxed{\operatorname{pgcd}(P, Q) = Q}.$$