Corrigé de la Série 3 : Fractions rationnelles

Réduction, pôles et décomposition en éléments simples

Énoncés et corrigés détaillés

Consigne. Traiter les huit exercices en détaillant les calculs et en justifiant chaque résultat. Sauf mention contraire, les polynômes sont à coefficients dans le corps indiqué.

Exercice 1 — Fractions équivalentes et réduction

Dans $\mathbb{R}(X)$, on considère

$$F = \frac{X^2 - 1}{X^2 - X}, \qquad G = \frac{1}{X - 1}.$$

1) Donner l'ensemble de définition réel de chacune des deux écritures affichées.

2) Réduire F à une forme irréductible dans $\mathbb{R}(X)$.

3) Calculer et réduire $F + G$ et FG.

4) Expliquer pourquoi les deux expressions de F définissent le même élément de $\mathbb{R}(X)$, mais pas nécessairement la même fonction sur les domaines naturels de leurs écritures.

1) Domaines des expressions

On a $X^2 - X = X(X - 1)$; l'expression initiale de F est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, tandis que celle de G est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2) Réduction

La factorisation $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ donne dans le corps $\mathbb{R}(X)$

$$\boxed{F = \frac{(X - 1)(X + 1)}{X(X - 1)} = \frac{X + 1}{X}.}$$

Les polynômes $X + 1$ et X sont premiers entre eux.

3) Opérations

En réduisant préalablement F,

$$F + G = \frac{(X + 1)(X - 1) + X}{X(X - 1)} = \boxed{\frac{X^2 + X - 1}{X(X - 1)}},$$

$$FG = \boxed{\frac{X + 1}{X(X - 1)}}.$$

Les deux formes sont irréductibles : leurs numérateurs ne s'annulent ni en 0 ni en 1, les racines du dénominateur.

4) Égalité formelle et domaine

Une fraction rationnelle est une classe de fractions polynomiales : on peut supprimer un facteur commun non nul dans $\mathbb{R}[X]$. En revanche, l'expression initiale n'est pas définie en $x = 1$, même si l'expression simplifiée $(x+1)/x$ y vaut 2. Il faut distinguer l'égalité dans $\mathbb{R}(X)$ du domaine de l'expression initialement choisie.

Exercice 2 — Division euclidienne, partie entière et asymptote

Soit

$$F = \frac{2X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X + 5}{X^2 + 1} \in \mathbb{R}(X).$$

1) Donner le degré de F.

2) Déterminer par division euclidienne sa partie entière E et sa partie propre H, telle que $F = E + H$.

3) Vérifier que $\lim_{x\to\pm\infty}(F(x) - E(x)) = 0$.

4) Calculer $F(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x(F(x) - E(x))$.

1) Degré

Le numérateur et le dénominateur sont de degrés 4 et 2. Ils sont premiers entre eux puisque le reste calculé ci-dessous est $-X + 4$, premier avec $X^2 + 1$. Donc

$$\boxed{\deg F = 4 - 2 = 2.}$$

2) Partie entière

La division dans $\mathbb{R}[X]$ donne

$$2X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X + 5 = (X^2 + 1)(2X^2 - X + 1) + (-X + 4).$$

Ainsi

$$\boxed{E = 2X^2 - X + 1, \qquad H = \frac{4 - X}{X^2 + 1}.}$$

3) Comportement à l'infini

Comme $\deg(4 - X) < \deg(X^2 + 1)$,

$$\boxed{F(x) - E(x) = \frac{4 - x}{x^2 + 1} \longrightarrow 0}$$

lorsque $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. La courbe de E est une asymptote polynomiale à celle de F.

4) Valeur et limite affinée

À $x = 0$, l'expression initiale vaut $\boxed{F(0) = 5}$. De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} x(F(x) - E(x)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x - x^2}{x^2 + 1} = \boxed{-1}.$$

Exercice 3 — Zéros, pôles et simplifications

On considère la fraction

$$F = \frac{(X-1)^2(X+2)}{(X-1)(X+1)^2(X^2+1)} \in \mathbb{R}(X).$$

1) Mettre F sous forme irréductible dans $\mathbb{R}(X)$.

2) Identifier les zéros et les pôles réels de F avec leurs ordres.

3) Déterminer les pôles complexes de F avec leurs ordres.

4) Calculer $\lim_{x\to -1}(x+1)^2F(x)$ et décrire le comportement de $F(x)$ au voisinage de -1.

1) Réduction

On simplifie le facteur commun $X-1$ dans le corps des fractions :

$$\boxed{F = \frac{(X-1)(X+2)}{(X+1)^2(X^2+1)}.}$$

Le numérateur n'a aucune racine parmi $-1, i, -i$; la fraction est irréductible.

2) Zéros et pôles réels

La forme réduite possède deux zéros réels simples : 1 et -2. Son seul pôle réel est -1, d'ordre 2. Attention : l'écriture de départ, prise comme fonction réelle, est aussi indéfinie en $x = 1$; la forme réduite y fournit un prolongement.

3) Pôles complexes

Puisque $X^2+1 = (X-i)(X+i)$,

$$\boxed{\text{Pôles dans } \mathbb{C} : \quad -1 \text{ (ordre 2)}, \quad i, -i \text{ (ordre 1).}}$$

4) Comportement près de -1

Pour $x \neq -1$,

$$(x+1)^2F(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2+1} \longrightarrow \frac{(-2)(1)}{2} = \boxed{-1}.$$

Donc $F(x) \sim -1/(x+1)^2$ et $\boxed{F(x) \to -\infty}$ des deux côtés de -1.

Exercice 4 — Éléments simples : deux pôles réels simples

Dans $\mathbb{R}(X)$, soit

$$F = \frac{5X+1}{(X-1)(X+2)}.$$

1) Justifier que F est une fraction propre et irréductible.

2) Chercher $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $F = \dfrac{A}{X-1} + \dfrac{B}{X+2}$.

3) Contrôler la décomposition en réduisant les deux éléments simples au même dénominateur.

4) Donner une primitive de la fonction $x \mapsto F(x)$ sur tout intervalle ne rencontrant pas ses pôles.

1) Partie propre et irréductibilité

Le degré du numérateur vaut $1 < 2$. Celui-ci n'est nul ni en 1 ($5+1=6$), ni en -2 ($-10+1=-9$). Aucun facteur ne se simplifie.

2) Méthode de substitution aux racines

L'identité à résoudre est

$$5X+1 = A(X+2) + B(X-1).$$

Pour $X=1$, on obtient $6 = 3A$, donc $A = 2$; pour $X=-2$, on obtient $-9 = -3B$, donc $B = 3$. Par conséquent

$$\boxed{F = \frac{2}{X-1} + \frac{3}{X+2}.}$$

3) Vérification

$$\frac{2}{X-1} + \frac{3}{X+2} = \frac{2(X+2)+3(X-1)}{(X-1)(X+2)} = \frac{5X+1}{(X-1)(X+2)}.$$

4) Primitive

Sur chaque intervalle $I \subset \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, une primitive est

$$\boxed{\mathcal{F}(x) = 2\ln|x-1| + 3\ln|x+2| + C, \qquad x \in I.}$$

Exercice 5 — Éléments simples : un pôle double

On considère

$$F = \frac{2X^2+3X+4}{(X-1)^2(X+1)}.$$

1) Déterminer les pôles de F et leurs ordres.

2) Chercher $A, B, C \in \mathbb{R}$ tels que

$$F = \frac{A}{X-1} + \frac{B}{(X-1)^2} + \frac{C}{X+1}.$$

3) Calculer $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 F(x)$ et vérifier sa relation avec B.

4) Donner la partie principale de F à chacun de ses pôles.

1) Pôles

Le numérateur vaut 9 en 1 et 3 en -1 ; aucun facteur du dénominateur ne se simplifie. Les pôles sont 1, d'ordre 2, et -1, d'ordre 1.

2) Décomposition

Après multiplication par $(X-1)^2(X+1)$,

$$2X^2+3X+4 = A(X^2-1)+B(X+1)+C(X-1)^2.$$

En $X=1$, $9=2B$, donc $B=9/2$. En $X=-1$, $3=4C$, donc $C=3/4$. La comparaison des coefficients de X^2 donne $A+C=2$, donc $A=5/4$. Ainsi

$$\boxed{F = \frac{5}{4(X-1)} + \frac{9}{2(X-1)^2} + \frac{3}{4(X+1)}.}$$

3) Coefficient du terme dominant

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2F(x) = \frac{2+3+4}{1+1} = \boxed{\frac{9}{2} = B}.$$

4) Parties principales

En 1, la partie principale est $\dfrac{9}{2(X-1)^2}+\dfrac{5}{4(X-1)}$. En -1, elle vaut $\dfrac{3}{4(X+1)}$. Ces termes rassemblent toutes les puissances négatives dans les développements locaux correspondants.

Exercice 6 — Facteur quadratique irréductible sur $\mathbb{R}$

Soit

$$F = \frac{X^2+3X+3}{(X-1)(X^2+1)}.$$

1) Justifier que X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

2) Déterminer les réels A, B, C pour lesquels $F = \dfrac{A}{X-1} + \dfrac{BX+C}{X^2+1}$.

3) Vérifier l'identité obtenue par développement du numérateur.

4) Calculer une primitive de F sur $]-\infty, 1[$ puis sur $]1, +\infty[$.

1) Irréductibilité

Le discriminant du polynôme réel X^2+1 est $-4<0$. Un quadratique réel sans racine réelle est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

2) Recherche des coefficients

L'identité cherchée équivaut à

$$X^2+3X+3 = A(X^2+1)+(BX+C)(X-1).$$

En $X=1$, on obtient $7=2A$, donc $A=7/2$. La comparaison des coefficients fournit

$$A+B=1, \qquad C-B=3, \qquad A-C=3.$$

D'où $B = -5/2$ et $C = 1/2$. Par conséquent

$$\boxed{F = \frac{7}{2(X-1)} + \frac{-5X+1}{2(X^2+1)}.}$$

3) Contrôle

On calcule

$$\frac{7}{2}(X^2+1) + \frac{-5X+1}{2}(X-1) = X^2 + 3X + 3,$$

ce qui confirme l'identité.

4) Primitives

Pour $x \neq 1$, une primitive est

$$\boxed{\mathcal{F}(x) = \frac{7}{2}\ln|x-1| - \frac{5}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + C.}$$

La constante C peut être choisie indépendamment sur les deux intervalles indiqués.

Exercice 7 — Pôles complexes et conjugaison des coefficients

Dans $\mathbb{C}(X)$, on prend

$$F = \frac{1}{(X-2)(X^2+1)}.$$

1) Donner les trois pôles complexes de F.

2) Décomposer F dans $\mathbb{C}(X)$ sous la forme

$$F = \frac{A}{X-2} + \frac{B}{X-i} + \frac{C}{X+i}.$$

3) Montrer que $C = \overline{B}$.

4) Regrouper les deux termes conjugués et retrouver une décomposition à coefficients réels.

1) Pôles

Le dénominateur est $(X-2)(X-i)(X+i)$. Les trois pôles $2, i, -i$ sont simples.

2) Coefficients complexes

Par multiplication et évaluation en 2,

$$A = \frac{1}{2^2+1} = \boxed{\frac{1}{5}}.$$

Pour le pôle i,

$$B = \frac{1}{(X-2)(X+i)}\bigg|_{X=i} = \frac{1}{(i-2)(2i)} = \boxed{-\frac{1}{10} + \frac{i}{5}}.$$

De même,

$$C = \frac{1}{(-i-2)(-2i)} = \boxed{-\frac{1}{10} - \frac{i}{5}}.$$

3) Conjugaison

Les coefficients de F sont réels et $-i$ est le conjugué de i. Les coefficients des éléments simples aux pôles conjugués sont donc conjugués : on vérifie ici directement $C = \overline{B}$.

4) Retour dans $\mathbb{R}(X)$

On met au même dénominateur :

$$\frac{B}{X-i} + \frac{\overline{B}}{X+i} = \frac{(B+\overline{B})X + i(B-\overline{B})}{X^2+1} = -\frac{X+2}{5(X^2+1)}.$$

Finalement,

$$\boxed{F = \frac{1}{5(X-2)} - \frac{X+2}{5(X^2+1)}.}$$

Exercice 8 — Fraction impropre : éléments simples et applications

On étudie

$$F = \frac{X^3+X^2+3X+1}{(X-1)(X^2+1)} \in \mathbb{R}(X).$$

1) Préciser son domaine réel et effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.

2) Décomposer entièrement F en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

3) Résoudre sur son domaine l'équation $F(x) = 1$.

4) Déterminer une primitive de F sur chacun des deux intervalles de son domaine et étudier ses limites au voisinage de $x = 1$.

1) Division

Le dénominateur est $(X-1)(X^2+1) = X^3 - X^2 + X - 1$. Il s'annule sur $\mathbb{R}$ uniquement en 1. La division donne

$$X^3+X^2+3X+1 = (X^3-X^2+X-1) + (2X^2+2X+2).$$

Donc

$$F = 1 + \frac{2X^2+2X+2}{(X-1)(X^2+1)}.$$

2) Décomposition en éléments simples

On écrit la fraction propre sous la forme

$$\frac{A}{X-1} + \frac{BX+C}{X^2+1}.$$

En $X = 1$, $6 = 2A$, d'où $A = 3$. En identifiant les coefficients de

$$2X^2+2X+2 = A(X^2+1) + (BX+C)(X-1),$$

on trouve $B = -1$ et $C = 1$. Ainsi

$$\boxed{F = 1 + \frac{3}{X-1} + \frac{1-X}{X^2+1}.}$$

3) Résolution de $F(x) = 1$

Pour $x \neq 1$,

$$F(x) - 1 = \frac{2(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Or x^2+x+1 a pour discriminant $1-4=-3<0$: $F(x)=1$ n'a donc $\boxed{\text{aucune solution réelle}}$.

4) Primitive et limites au pôle

Une primitive, sur chaque intervalle $]-\infty,1[$ ou $]1,+\infty[$, est

$$\boxed{\mathcal{F}(x)=x+3\ln|x-1|+\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.}$$

Au voisinage de 1, le terme dominant est $3/(x-1)$; les autres termes restent bornés. Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-}F(x)=-\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+}F(x)=+\infty.}$$