Série 1 : Structures algébriques

Groupes, morphismes, groupes cycliques et anneaux

Énoncés des exercices

Consigne. Justifier toutes les réponses. Pour les permutations, la composition se lit de droite à gauche. Les anneaux et les sous-anneaux sont unitaires ; un sous-anneau contient l'unité de l'anneau ambiant.

Exercice 1 — Vrai ou faux ?

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse, puis donner une démonstration ou un contre-exemple.

1) Dans tout groupe, $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

2) Un groupe dans lequel $x^2 = e$ pour tout élément x est abélien.

3) La réunion de deux sous-groupes est toujours un sous-groupe.

4) Un morphisme de groupes est injectif si et seulement si son noyau est réduit au neutre.

5) Tout groupe fini d'ordre premier est cyclique.

6) Tout groupe abélien fini est cyclique.

7) Dans tout anneau, $ab = 0$ implique $a = 0$ ou $b = 0$.

8) Tout anneau intègre fini est un corps.

9) $2\mathbb{Z}$ est un sous-anneau unitaire de $\mathbb{Z}$.

10) La classe $\overline{5}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Exercice 2 — Une loi de groupe sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

On pose $E = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et, pour $x, y \in E$,

$$x \star y = x + y + xy.$$

1) Vérifier que $\star$ est une loi interne sur E.

2) Montrer qu'elle est associative et commutative.

3) Déterminer son neutre et le symétrique de chaque $x \in E$. En déduire que $(E, \star)$ est un groupe abélien.

4) Montrer que $\varphi : E \to \mathbb{R}^*$, $\varphi(x) = 1 + x$, est un isomorphisme vers $(\mathbb{R}^*, \times)$.

5) Résoudre $2 \star x = 5$ dans E.

Exercice 3 — Sous-groupes de $\mathbb{Z}$: intersection, somme et réunion

Dans le groupe $(\mathbb{Z}, +)$, on considère $H = 6\mathbb{Z}$ et $K = 10\mathbb{Z}$.

1) Vérifier que H et K sont des sous-groupes de $\mathbb{Z}$.

2) Déterminer $H \cap K$.

3) On pose $H + K = \{h + k : h \in H,\ k \in K\}$. Montrer que $H + K = 2\mathbb{Z}$.

4) La réunion $H \cup K$ est-elle un sous-groupe ?

5) Déterminer le sous-groupe $\langle 6, 10\rangle$ engendré par 6 et 10.

Exercice 4 — Un morphisme entre deux groupes de classes

On note $[x]_n$ la classe de l'entier x modulo n et l'on considère

$$f : (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +), \qquad f([x]_{12}) = [2x]_8.$$

1) Montrer que f est bien définie et que c'est un morphisme de groupes.

2) Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

3) Le morphisme est-il injectif ? surjectif ? Vérifier $|\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}| = |\ker f|\,|\operatorname{Im} f|$.

4) Résoudre $f([x]_{12}) = [6]_8$, puis $f([x]_{12}) = [1]_8$.

Exercice 5 — Racines de l'unité, groupes cycliques et Lagrange

On pose $\zeta = e^{2\pi i/12}$ et $U_{12} = \{z \in \mathbb{C} : z^{12} = 1\}$.

1) Montrer que U_{12} est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ et que $U_{12} = \langle \zeta \rangle$ est d'ordre 12.

2) Établir $\operatorname{ord}(\zeta^k) = 12/\operatorname{pgcd}(12, k)$ pour tout entier k.

3) Déterminer tous les générateurs de U_{12}, puis les ordres de ζ^3, ζ^4 et ζ^8.

4) Pour chaque diviseur positif d de 12, montrer qu'il existe un unique sous-groupe d'ordre d, à savoir $\langle \zeta^{12/d} \rangle$.

5) Résoudre $z^4 = 1$ dans U_{12}.

Exercice 6 — Calculs dans le groupe des permutations S_3

On pose $\sigma = (1\ 2\ 3)$ et $\tau = (1\ 2)$.

1) Calculer σ^2, σ^{-1}, τ^{-1}, $\sigma\tau$ et $\tau\sigma$. Le groupe S_3 est-il abélien ?

2) Déterminer les ordres et les signatures de σ et τ.

3) Montrer que $\langle \sigma, \tau \rangle = S_3$.

4) Déterminer le sous-groupe alterné A_3 et calculer $\tau\sigma\tau^{-1}$.

5) Résoudre $\sigma x = \tau$ dans S_3.

Exercice 7 — Un sous-anneau de $\mathbb{R}$ et ses éléments inversibles

On admet que $\sqrt{2}$ est irrationnel et l'on considère

$$A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

1) Montrer que l'écriture $a + b\sqrt{2}$ est unique.

2) Montrer que A est un sous-anneau unitaire de $\mathbb{R}$.

3) L'anneau A est-il intègre ? Est-ce un corps ?

4) Montrer que $s : A \to A$, $s(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$, est un automorphisme d'anneaux.

5) Montrer que $a + b\sqrt{2}$ est inversible dans A si et seulement si $a^2 - 2b^2 \in \{-1, 1\}$. En déduire les inverses de $1 + \sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$.

Exercice 8 — L'anneau $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$: unités et équations

Dans cet exercice, $\overline{a}$ désigne la classe de a modulo 12.

1) Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et leurs inverses. Le groupe multiplicatif des inversibles est-il cyclique ?

2) Déterminer les diviseurs de zéro non nuls. L'anneau est-il intègre ? Est-ce un corps ?

3) Résoudre $\overline{8}\,x = \overline{4}$, puis $\overline{8}\,x = \overline{3}$.

4) Résoudre $x^2 = \overline{1}$ et $x^2 = x$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

5) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $u \equiv 2 \pmod 3$, $u \equiv 3 \pmod 4$.