Série 2 : Polynômes

Calculs, racines, division, PGCD et factorisation

Énoncés des exercices

Consigne. Traiter les exercices en détaillant les calculs et en justifiant chaque résultat. Sauf mention contraire, les polynômes sont à coefficients dans le corps indiqué.

Exercice 1 — Opérations, degrés et composition

Dans $\mathbb{Q}[X]$, on considère

$$P = 2X^3 - X^2 - 2X + 1, \qquad Q = X^2 - 1, \qquad R = (X+1)^2.$$

1) Factoriser P et en déduire toutes ses racines rationnelles.

2) Calculer et factoriser $P + Q$, $P - Q$ et PQ.

3) Préciser les degrés et les coefficients dominants de P, Q et PQ.

4) Calculer $R \circ Q$ et $Q \circ R$. La composition est-elle commutative ?

Exercice 2 — Division euclidienne, Horner et racines multiples

Soit $A = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

1) Effectuer la division euclidienne de A par $X - 1$.

2) Calculer $A(1)$ et $A'(1)$. Que peut-on en conclure ?

3) Effectuer la division de A par $X^2 + 1$ et factoriser A dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

4) Donner toutes les racines complexes de A avec leur multiplicité.

Exercice 3 — Multiplicité, dérivée et PGCD

Dans $\mathbb{Q}[X]$, on pose $P = (X-1)^3(X+2)^2$.

1) Donner le degré, le coefficient dominant et les racines de P avec leurs multiplicités.

2) Calculer et factoriser la dérivée formelle P'.

3) Déterminer $\operatorname{pgcd}(P, P')$, sous forme unitaire.

4) En déduire les racines multiples et vérifier que $P/\operatorname{pgcd}(P, P')$ est sans racine multiple.

Exercice 4 — Algorithme d'Euclide, Bézout et congruences

Soient $A = X^3 - 1$ et $B = X^2 - 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

1) Exécuter l'algorithme d'Euclide et obtenir le PGCD unitaire D de A et B.

2) Trouver deux polynômes $U, V \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $AU + BV = D$.

3) Déterminer $\operatorname{ppcm}(A, B)$ sous forme factorisée.

4) En posant $A_1 = A/D$ et $B_1 = B/D$, justifier que X est inversible modulo A_1, puis donner un représentant de son inverse.

Exercice 5 — Irréductibilité et changement de corps

On considère $P = X^4 + 4$ et $Q = X^3 - 2$.

1) Vérifier l'identité $P = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2)$.

2) Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puis en facteurs de degré un dans $\mathbb{C}[X]$.

3) Prouver que Q est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

4) Expliquer pourquoi Q n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6 — Interpolation de Lagrange et relations de Viète

1) Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{Q}_2[X]$ tel que $P(-1) = 2$, $P(0) = 1$ et $P(1) = 4$.

2) Construire P par la formule de Lagrange et l'écrire sous forme développée.

3) En déduire $P(2)$.

4) Déterminer le polynôme unitaire $S \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 3 dont les racines sont 1, 2 et 3. Retrouver les trois coefficients non dominants grâce aux relations de Viète.

Exercice 7 — Polynômes sur le corps fini $\mathbb{F}_5$

Dans cet exercice, $K = \mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $P = X^5 - X$ et $Q = X^2 + 1$.

1) Montrer que tout élément de K est une racine de P.

2) Factoriser P en facteurs irréductibles de $K[X]$.

3) Calculer P' et prouver que les racines de P sont simples.

4) Décomposer Q dans $K[X]$, déterminer $\operatorname{pgcd}(P, Q)$.