Série 3 : Fractions rationnelles

Réduction, pôles et décomposition en éléments simples

Énoncés des exercices

Consigne. Traiter les huit exercices en détaillant les calculs et en justifiant chaque résultat. Sauf mention contraire, les polynômes sont à coefficients dans le corps indiqué.

Exercice 1 — Fractions équivalentes et réduction

Dans $\mathbb{R}(X)$, on considère

$$F = \frac{X^2 - 1}{X^2 - X}, \qquad G = \frac{1}{X - 1}.$$

1) Donner l'ensemble de définition réel de chacune des deux écritures affichées.

2) Réduire F à une forme irréductible dans $\mathbb{R}(X)$.

3) Calculer et réduire $F + G$ et FG.

4) Expliquer pourquoi les deux expressions de F définissent le même élément de $\mathbb{R}(X)$, mais pas nécessairement la même fonction sur les domaines naturels de leurs écritures.

Exercice 2 — Division euclidienne, partie entière et asymptote

Soit

$$F = \frac{2X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X + 5}{X^2 + 1} \in \mathbb{R}(X).$$

1) Donner le degré de F.

2) Déterminer par division euclidienne sa partie entière E et sa partie propre H, telle que $F = E + H$.

3) Vérifier que $\lim_{x \to \pm\infty} (F(x) - E(x)) = 0$.

4) Calculer $F(0)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x(F(x) - E(x))$.

Exercice 3 — Zéros, pôles et simplifications

On considère la fraction

$$F = \frac{(X-1)^2(X+2)}{(X-1)(X+1)^2(X^2+1)} \in \mathbb{R}(X).$$

1) Mettre F sous forme irréductible dans $\mathbb{R}(X)$.

2) Identifier les zéros et les pôles réels de F avec leurs ordres.

3) Déterminer les pôles complexes de F avec leurs ordres.

4) Calculer $\lim_{x\to -1}(x+1)^2F(x)$ et décrire le comportement de $F(x)$ au voisinage de -1.

Exercice 4 — Éléments simples : deux pôles réels simples

Dans $\mathbb{R}(X)$, soit

$$F = \frac{5X+1}{(X-1)(X+2)}.$$

1) Justifier que F est une fraction propre et irréductible.

2) Chercher $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $F = \dfrac{A}{X-1} + \dfrac{B}{X+2}$.

3) Contrôler la décomposition en réduisant les deux éléments simples au même dénominateur.

4) Donner une primitive de la fonction $x \mapsto F(x)$ sur tout intervalle ne rencontrant pas ses pôles.

Exercice 5 — Éléments simples : un pôle double

On considère

$$F = \frac{2X^2+3X+4}{(X-1)^2(X+1)}.$$

1) Déterminer les pôles de F et leurs ordres.

2) Chercher $A, B, C \in \mathbb{R}$ tels que

$$F = \frac{A}{X-1} + \frac{B}{(X-1)^2} + \frac{C}{X+1}.$$

3) Calculer $\lim_{x\to 1}(x-1)^2F(x)$ et vérifier sa relation avec B.

4) Donner la partie principale de F à chacun de ses pôles.

Exercice 6 — Facteur quadratique irréductible sur $\mathbb{R}$

Soit

$$F = \frac{X^2 + 3X + 3}{(X-1)(X^2+1)}.$$

1) Justifier que $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

2) Déterminer les réels A, B, C pour lesquels $F = \dfrac{A}{X-1} + \dfrac{BX + C}{X^2+1}$.

3) Vérifier l'identité obtenue par développement du numérateur.

4) Calculer une primitive de F sur $]-\infty, 1[$ puis sur $]1, +\infty[$.

Exercice 7 — Pôles complexes et conjugaison des coefficients

Dans $\mathbb{C}(X)$, on prend

$$F = \frac{1}{(X-2)(X^2+1)}.$$

1) Donner les trois pôles complexes de F.

2) Décomposer F dans $\mathbb{C}(X)$ sous la forme

$$F = \frac{A}{X-2} + \frac{B}{X-i} + \frac{C}{X+i}.$$

3) Montrer que $C = \overline{B}$.

4) Regrouper les deux termes conjugués et retrouver une décomposition à coefficients réels.

Exercice 8 — Fraction impropre : éléments simples et applications

On étudie

$$F = \frac{X^3 + X^2 + 3X + 1}{(X-1)(X^2+1)} \in \mathbb{R}(X).$$

1) Préciser son domaine réel et effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.

2) Décomposer entièrement F en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

3) Résoudre sur son domaine l'équation $F(x) = 1$.

4) Déterminer une primitive de F sur chacun des deux intervalles de son domaine et étudier ses limites au voisinage de $x = 1$.