UNIVERSITÉ MOHAMMED V

FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT

Département de Mathématiques

FORMATION UNIVERSITAIRE

Licence – Sciences Mathématiques

Algèbre III

CHAPITRE 1

Systèmes linéaires et méthode du pivot

Systèmes généraux, systèmes homogènes et méthode de Gauss

SUPPORT DE COURS

Prof. Mohamed Najib LAATABI

najib.laatabi@um5r.ac.ma

mohamednajiblaatabi.com

Toute remarque ou suggestion est la bienvenue. Si vous constatez une erreur dans ce document, merci de bien vouloir la signaler.

Année universitaire • **2026–2027**

Table des matières

Notations **ii**

1 Systèmes linéaires et méthode du pivot **1**

1.1 Systèmes linéaires : définitions 1

1.2 Équivalence et opérations élémentaires 3

1.3 Échelonnement et pivots de Gauss 4

1.4 Discussion du nombre de solutions 8

1.5 Systèmes linéaires homogènes 9

1.6 Discussion en fonction d'un paramètre 11

Bibliographie **13**

Notations

Notation	Signification
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$	Corps des coefficients : réels ou complexes.
$m, n \in \mathbb{N}^*$	Nombre d'équations et nombre d'inconnues.
$x_1, \ldots, x_n$	Inconnues du système.
$a_{ij} \in \mathbb{K}$	Coefficient de x_j dans la i-ème équation.
$b_i \in \mathbb{K}$	Second membre de la i-ème équation.
(S)	Système linéaire considéré.
$\mathbb{K}^n$	Ensemble des n-uplets de scalaires de $\mathbb{K}$.
$\mathcal{S}(S)$	Ensemble des solutions du système (S).
$\mathcal{S}(S) = \varnothing$	Système incompatible (aucune solution).
$(S) \sim (S')$	Systèmes équivalents : $\mathcal{S}(S) = \mathcal{S}(S')$.
$T(S)$	Tableau des coefficients et des seconds membres.
L_i	i-ème équation du système.
$L_i \leftrightarrow L_j$	Échange de deux équations.
$L_i \leftarrow \lambda L_i$	Multiplication par $\lambda \neq 0$.
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	Addition de λL_j à L_i, avec $i \neq j$.
p_i	Indice de la première inconnue de coefficient non nul dans la i-ème équation.
$a_{i,p_i} \neq 0$	Pivot de la i-ème équation.
r	Nombre de pivots après échelonnement.
$x_{p_1}, \ldots, x_{p_r}$	Inconnues principales.
$x_j,\ j \notin \{p_1, \ldots, p_r\}$	Inconnues libres.
$0 = c,\ c \neq 0$	Équation contradictoire.
$0 = 0$	Équation toujours vérifiée.
(S_0)	Système homogène associé à (S).
$(0, \ldots, 0)$	Solution nulle du système homogène.
$(s_1, \ldots, s_n)$	Solution particulière de (S).
$s, t \in \mathbb{K}$	Paramètres libres dans l'expression des solutions.
(S_a)	Système dépendant d'un paramètre a.
$\mathcal{S}_a$	Ensemble des solutions du système (S_a).

Chapitre 1

Systèmes linéaires et méthode du pivot

Ce chapitre présente une méthode de résolution des systèmes linéaires fondée sur des transformations des équations. On apprend à conserver l'ensemble des solutions, à éliminer successivement les inconnues et à discuter les différents cas qui peuvent se présenter. Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Systèmes linéaires : définitions

1.1.1 Équations, inconnues et solutions

Définition 1.1.1: Équation linéaire

Une équation linéaire à n inconnues $x_1, \dots, x_n$ est une égalité de la forme

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b, \qquad a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{K}.$$

Les nombres $a_1, \dots, a_n$ sont les *coefficients* et b est le *second membre*. Les coefficients sont fixés pendant la résolution.

Exemple 1: Reconnaître une équation linéaire

Les équations $2x-3y+z=4$ et $x+ay=1$, où a est fixé, sont linéaires en leurs inconnues. En revanche, $xy=1$, $x^2+y=0$ et $x+1/y=2$ ne sont pas des équations linéaires en x, y.

Définition 1.1.2: Système de m équations à n inconnues

Pour $m, n \geq 1$, un système linéaire sur $\mathbb{K}$ s'écrit

$$(S): \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Une *solution* est un n-uplet de scalaires qui vérifie simultanément toutes ces équations. On note

$$\mathcal{S}(S) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \text{ pour tout } i \right\}.$$

Définition 1.1.3: Nature d'un système

Un système est *compatible* s'il possède au moins une solution, et *incompatible* s'il n'en possède aucune. Un système compatible est *déterminé* s'il possède une seule solution, et *indéterminé* s'il en possède plusieurs.

Exemple 2: Les trois situations élémentaires

Une solution unique. Pour

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1, \end{cases}$$

l'addition des équations donne $2x = 4$, puis $y = 3 - x = 1$. Réciproquement, $(2, 1)$ vérifie les deux équations. Donc $\mathcal{S} = \{(2, 1)\}$.

Aucune solution. Si $x + y = 1$ et $2x + 2y = 3$, la première égalité impose $2x + 2y = 2$, en contradiction avec la seconde. Donc $\mathcal{S} = \varnothing$.

Plusieurs solutions. Les équations $x+y = 1$ et $2x+2y = 2$ imposent la même condition. En posant $y = t$, on obtient

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(1 - t, t) : t \in \mathbb{K}\}.}$$

Exemple 3: Système triangulaire et substitution remontante

Considérons

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ \quad 3y + 2z = 7, \\ \qquad 2z = 4. \end{cases}$$

La dernière équation donne $z = 2$. La deuxième donne ensuite $3y = 7-4 = 3$, donc $y = 1$. Enfin, la première donne $x = 3 - 2 + 2 = 3$. Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(3, 1, 2)\}.}$$

Cette résolution de la dernière équation vers la première s'appelle la *substitution remontante*.

1.1.2 Tableau des coefficients

Définition 1.1.4: Tableau associé à un système

Une fois l'ordre des inconnues fixé, on représente le système par le tableau

$$T(S) = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Les n premières colonnes contiennent les coefficients des inconnues ; la dernière contient les seconds membres. Une inconnue absente d'une équation a un coefficient nul.

Exemple 4: Passage du système au tableau

Dans l'ordre x, y, z,

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 2x + 3z = 1 \end{cases} \longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

Le zéro de la deuxième ligne rappelle que y ne figure pas dans la deuxième équation.

1.2 Équivalence et opérations élémentaires

Définition 1.2.1: Systèmes équivalents

Deux systèmes portant sur les mêmes inconnues sont *équivalents* lorsqu'ils ont exactement les mêmes solutions :

$$\boxed{(S) \sim (S') \iff \mathcal{S}(S) = \mathcal{S}(S').}$$

Théorème 1.2.1: Trois opérations préservant les solutions

En notant L_i la i-ième équation, chacune des opérations suivantes transforme un système en un système équivalent :

1. échanger deux équations : $L_i \leftrightarrow L_j$;
2. multiplier une équation par un scalaire non nul : $L_i \leftarrow \lambda L_i$, avec $\lambda \neq 0$;
3. ajouter à une équation un multiple d'une autre : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, avec $i \neq j$.

L'opération porte sur toute l'équation, second membre compris.

Démonstration. **Échange de deux équations.** Vérifier toutes les équations ne dépend pas de leur ordre. L'ensemble des solutions est donc conservé.

Multiplication par un scalaire non nul. Pour $\lambda \neq 0$,

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \iff \lambda a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda a_{in}x_n = \lambda b_i.$$

L'implication réciproque s'obtient en divisant par λ.

Addition d'un multiple d'une autre équation. Toute solution des équations L_i, L_j vérifie $L_i + \lambda L_j$. Réciproquement, une solution du système transformé vérifie toujours L_j, qui n'a pas été modifiée. En retranchant λL_j de la nouvelle équation, on retrouve L_i. Les autres équations sont identiques ; les deux systèmes ont donc les mêmes solutions. ■

Exemple 5: Élimination d'une inconnue

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3x + 4y = 11 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{cases} x + 2y = 5, \\ -2y = -4. \end{cases}$$

On obtient $y = 2$, puis $x = 1$. Par équivalence des systèmes,

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(1, 2)\}.}$$

Remarque 1: Pourquoi les conditions sont nécessaires

Multiplier $x = 1$ par zéro donne $0 = 0$ et fait perdre une condition. De même, remplacer simultanément L_1 par $L_1 + L_2$ et L_2 par $L_1 + L_2$ peut faire perdre une condition : par exemple $x = 0$, $y = 0$ devient deux fois $x + y = 0$. On effectue donc les opérations successivement, ou l'on précise que plusieurs lignes sont modifiées à partir d'une même ligne laissée inchangée.

1.3 Échelonnement et pivots de Gauss

1.3.1 Systèmes échelonnés

Définition 1.3.1: Pivot et système échelonné

Considérons le système linéaire (S)
Pour une équation d'indice i telle que $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \neq (0, \dots, 0)$, on pose

$$p_i = \min\{j \in \{1, \dots, n\} : a_{ij} \neq 0\}.$$

Ainsi, cette équation s'écrit

$$\underbrace{a_{i1}x_1 + \cdots + a_{i,p_i-1}x_{p_i-1}}_{=0} + \underbrace{a_{i,p_i}}_{\text{pivot}\neq 0} x_{p_i} + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

Le coefficient a_{i,p_i} est appelé *pivot* de la i-ème équation.
Le système (S) est dit *échelonné* s'il est de la forme

$$(S) : \begin{cases} a_{1,p_1}x_{p_1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{2,p_2}x_{p_2} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{r,p_r}x_{p_r} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r, \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 = b_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 = b_m, \end{cases}$$

avec

$$\boxed{1 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_r \leq n, \qquad a_{i,p_i} \neq 0 \quad (1 \leq i \leq r).}$$

Les équations $0 = b_i$ sont absentes si $r = m$; si $r = 0$, toutes les équations sont de cette forme.
Pour le système échelonné précédent :

$$\boxed{\begin{array}{rl} \text{Inconnues principales :} & x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_r}, \\ \text{Inconnues libres :} & x_j, \qquad j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{p_1, \dots, p_r\}. \end{array}}$$

Exemple 6: Des pivots non consécutifs

Considérons le système

$$(S): \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

est échelonné. Les pivots correspondent à x_1 et x_3 ; les inconnues libres sont x_2 et x_3. Un système échelonné n'a donc pas nécessairement un pivot dans chaque colonne.

Proposition 1.3.1: Existence d'un système échelonné équivalent

Tout système linéaire (S) de m équations à n inconnues est équivalent à un système échelonné (S'), obtenu par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les équations :

$$\boxed{(S) \sim (S'), \qquad (S') \text{ échelonné.}}$$

Démonstration. Considérons

$$(S): \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad 1 \le i \le m.$$

Si

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}, \quad a_{ij} = 0,$$

alors (S) est déjà échelonné.

Sinon, posons

$$p_1 = \min\{j : \exists\, i,\ a_{ij} \neq 0\}.$$

Choisissons k tel que $a_{k,p_1} \neq 0$. Par $L_1 \leftrightarrow L_k$, on obtient

$$a_{1,p_1} \neq 0, \qquad a_{i,j} = 0 \quad (j < p_1).$$

Pour tout $i \in \{2,\dots,m\}$, effectuons

$$\boxed{L_i \longleftarrow L_i - \frac{a_{i,p_1}}{a_{1,p_1}} L_1.}$$

Ainsi,

$$a'_{i,p_1} = a_{i,p_1} - \frac{a_{i,p_1}}{a_{1,p_1}} a_{1,p_1} = 0,$$

et

$$a'_{i,j} = 0, \qquad j \le p_1, \quad i \ge 2.$$

On applique le même procédé aux équations $L_2,\dots,L_m$, puis aux suivantes.

Les positions successives des pivots vérifient

$$\boxed{1 \le p_1 < p_2 < \cdots < p_r \le n, \qquad r \le \min(m,n).}$$

Le système obtenu est donc de la forme

$$(S') : \begin{cases} a'_{1,p_1}x_{p_1} + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{2,p_2}x_{p_2} + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \vdots \\ a'_{r,p_r}x_{p_r} + \cdots + a'_{rn}x_n = b'_r, \\ 0 = b'_{r+1}, \\ \vdots \\ 0 = b'_m, \end{cases}$$

avec $a'_{i,p_i} \neq 0$ pour $1 \leq i \leq r$.

Enfin, chaque opération élémentaire est réversible, donc conserve l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S}(S) = \mathcal{S}(S').$$

Par conséquent,

$$\boxed{(S) \sim (S'), \qquad (S') \text{ échelonné.}}$$

■

Exemple 7:

Dans $\mathbb{R}^3$, considérons le système

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x + 3y + z = 10, \\ x + 2y + 3z = 14. \end{cases}$$

Le premier pivot est $a_{11} = 1 \neq 0$.
On effectue

$$L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1, \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - L_1.$$

D'où

$$(S) \sim \begin{cases} x + y + z = 6, \\ y - z = -2, \\ y + 2z = 8. \end{cases}$$

Le deuxième pivot est $a_{22} = 1 \neq 0$.
On effectue

$$L_3 \longleftarrow L_3 - L_2.$$

Ainsi,

$$(S) \sim \boxed{\begin{cases} x + y + z = 6, \\ y - z = -2, \\ 3z = 10. \end{cases}}$$

Le système obtenu est *échelonné*, avec

$$\boxed{p_1 = 1, \qquad p_2 = 2, \qquad p_3 = 3.}$$

Les pivots sont 1, 1 et 3.
Les inconnues principales sont x, y, z ; il n'y a aucune inconnue libre.

1.3.2 Méthode pratique du pivot

Algorithme de Gauss

1. Fixer l'ordre des inconnues et écrire le tableau des coefficients.
2. Dans les lignes encore à traiter, choisir la première colonne contenant un coefficient non nul.
3. Placer un coefficient non nul sur la première de ces lignes par un échange éventuel.
4. Annuler les coefficients situés sous ce pivot, puis recommencer sur les lignes restantes.
5. Examiner les équations sans inconnue ; en l'absence de contradiction, fixer les inconnues libres et remonter les équations.

Exemple 8: Résolution d'un système à trois inconnues

Considérons le tableau

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right].$$

On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, en conservant L_1. Il vient

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right].$$

La dernière équation donne $z = 3$. Puis $y - z = -1$ donne $y = 2$ et $x + y + z = 4$ donne $x = -1$. Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(-1, 2, 3)\}.}$$

La vérification dans le système initial donne respectivement 4, 7 et 3 pour les trois premiers membres.

Exemple 9: Un échange de lignes nécessaire

Pour résoudre $y + z = 2$, $x - y + z = 0$, $2x + z = 1$, on commence par échanger les deux premières équations :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Puis $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ donne $-3z = -3$. Ainsi $z = 1$, $y = 1$, $x = 0$ et $\mathcal{S} = \{(0, 1, 1)\}$.

1.3.3 Échelonnement réduit : méthode de Gauss–Jordan

Définition 1.3.2: Forme échelonnée réduite

Un système échelonné est sous forme *échelonnée réduite* si chaque pivot vaut 1 et si les autres coefficients de la colonne de ce pivot sont nuls. Les équations sans inconnue sont examinées séparément.

Proposition 1.3.2: Réduction après échelonnement

À partir d'un système échelonné, on obtient une forme échelonnée réduite en divisant chaque équation à pivot par son pivot, puis en éliminant les coefficients au-dessus des pivots, du dernier vers le premier.

Démonstration. Les pivots sont non nuls : les divisions sont donc autorisées. Une fois le dernier pivot ramené à 1, on soustrait un multiple de sa ligne à chaque ligne située au-dessus. Cela ne modifie pas les colonnes des pivots précédents, qui sont nulles sur cette dernière ligne. En remontant, on obtient la propriété annoncée par des opérations élémentaires. ■

Exemple 10: Lecture d'une inconnue libre

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Les équations deviennent $x + 2z = 1$ et $y - z = 1$. En posant $z = t$, on obtient

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(1 - 2t, 1 + t, t) : t \in \mathbb{K}\}.}$$

Chaque valeur de t donne une solution, et toute solution s'obtient en prenant $t = z$.

1.4 Discussion du nombre de solutions

1.4.1 Équation contradictoire et inconnues libres

Théorème 1.4.1: Les trois cas de résolution

Après échelonnement d'un système sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

1. s'il apparaît une équation $0 = c$ avec $c \neq 0$, le système n'a aucune solution ;
2. s'il n'y a aucune contradiction et aucune inconnue libre, il possède une solution unique ;
3. s'il n'y a aucune contradiction et au moins une inconnue libre, il possède une infinité de solutions.

Démonstration. **Premier cas.** Aucun choix des inconnues ne peut vérifier une égalité $0 = c$ avec $c \neq 0$.

Deuxième cas. Les équations sans inconnue sont alors des identités $0 = 0$. La dernière équation à pivot détermine sa seule inconnue principale. En remontant, chaque équation détermine exactement une nouvelle inconnue, puisque son pivot est non nul. Toutes les inconnues sont ainsi déterminées de manière unique.

Troisième cas. Fixons arbitrairement les valeurs des inconnues libres. La substitution remontante détermine alors de manière unique les inconnues principales. Deux choix différents des inconnues libres donnent deux solutions différentes, car au moins une de leurs coordonnées diffère. Comme $\mathbb{K}$ est infini, il y a une infinité de solutions. ■

Corollaire 1.4.1: Nombre de paramètres libres

Si un système compatible à n inconnues possède p pivots après échelonnement, ses solutions sont décrites par $n-p$ paramètres libres, chacun parcourant $\mathbb{K}$ indépendamment des autres.

Démonstration. Les p pivots correspondent à p inconnues distinctes. Les $n-p$ autres inconnues peuvent être choisies arbitrairement, puis la remontée donne les p inconnues principales. ■

Exemple 11: Deux paramètres libres

Le système $x+y+z=2$, $2x+2y+2z=4$ se réduit à

$$x+y+z=2, \qquad 0=0.$$

Il a un pivot et deux inconnues libres. En posant $y=s$, $z=t$, on obtient

$$\boxed{\mathcal{S}=\{(2-s-t,s,t):(s,t)\in\mathbb{K}^2\}.}$$

Remarque 2: Le nombre d'équations ne suffit pas

Le système $x=1$, $2x=2$ possède une solution malgré ses deux équations à une inconnue. À l'inverse, $x+y+z=0$, $x+y+z=1$ n'a aucune solution malgré ses deux équations à trois inconnues. Toutefois, un système compatible ayant moins d'équations que d'inconnues possède nécessairement une inconnue libre et donc une infinité de solutions.

1.5 Systèmes linéaires homogènes

1.5.1 Définition et résolution

Définition 1.5.1: Système homogène

Un système linéaire (S_0) est dit *homogène* si

$$(S_0): \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0, \qquad 1\le i\le m.$$

On a toujours

$$(0,\dots,0)\in\mathcal{S}(S_0),$$

appelée *solution nulle*.

Proposition 1.5.1: Solutions d'un système homogène

Soit (S_0) un système homogène de m équations à n inconnues, et soit r le nombre de pivots d'un système échelonné équivalent.
Alors :

$$\boxed{\begin{aligned} r = n &\implies \mathcal{S}(S_0) = \{(0,\dots,0)\}, \\ r < n &\implies \mathcal{S}(S_0) \text{ est infini.} \end{aligned}}$$

En particulier,

$$\boxed{m < n \implies \exists\, X \in \mathcal{S}(S_0), \quad X \neq 0.}$$

Démonstration. Puisque

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot 0 = 0, \qquad \forall i \in \{1,\dots,m\},$$

on a

$$(0,\dots,0) \in \mathcal{S}(S_0).$$

Après échelonnement :

$$\begin{aligned} r = n &\implies \text{aucune inconnue libre} \\ &\implies \mathcal{S}(S_0) = \{(0,\dots,0)\}. \end{aligned}$$

Si $r < n$, il existe au moins une inconnue libre, notée x_k. En posant

$$x_k = t \in \mathbb{K}, \qquad x_j = 0 \quad \text{pour les autres inconnues libres,}$$

la remontée détermine une solution $X(t)$ avec

$$X(t) \neq X(s) \qquad (t \neq s).$$

Ainsi, si $\mathbb{K}$ est infini,

$$|\mathcal{S}(S_0)| = \infty.$$

Enfin,

$$r \leq \min(m, n)$$

et donc

$$\boxed{m < n \implies r \leq m < n \implies r < n \implies \mathcal{S}(S_0) \neq \{0\}.}$$

■

Exemple 12: Résolution d'un système homogène

Sur $\mathbb{R}$, considérons

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne $-2y + z = 0$. En posant $z = 2t$, on trouve $y = t$ et $x = -3t$. Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{S}(S_0) = \{(-3t, t, 2t) : t \in \mathbb{R}\}.}$$

Le choix $z = 2t$ est permis, car $2t$ parcourt tout $\mathbb{R}$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}$.

1.5.2 Lien avec le système homogène associé

Proposition 1.5.2: Ajouter une solution homogène à une solution particulière

Supposons que $(s_1, \dots, s_n)$ soit une solution de (S). Alors $(x_1, \dots, x_n)$ est solution de (S) si et seulement si $(x_1 - s_1, \dots, x_n - s_n)$ est solution du système homogène associé (S_0).

Démonstration. Puisque $\sum_j a_{ij} s_j = b_i$ pour chaque i,

$$\begin{aligned} \sum_j a_{ij} x_j = b_i &\iff \sum_j a_{ij} x_j - \sum_j a_{ij} s_j = 0 \\ &\iff \sum_j a_{ij} (x_j - s_j) = 0. \end{aligned}$$

Ces équivalences valent pour toutes les équations simultanément, ce qui prouve les deux implications. ■

Exemple 13: Une solution particulière et toutes les solutions

Pour $x + y + z = 2$, $x - y + 2z = 0$, le couple des deux égalités est vérifié par $(1, 1, 0)$. Le système homogène associé est celui de l'exemple précédent. On en déduit

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(1 - 3t, 1 + t, 2t) : t \in \mathbb{R}\}.}$$

Cette écriture est une addition coordonnée par coordonnée de n-uplets ; aucune notion nouvelle n'est nécessaire pour la vérifier.

1.6 Discussion en fonction d'un paramètre

Proposition 1.6.1: Pivot dépendant d'un paramètre

Si le coefficient choisi comme pivot est $p(a)$, une division par ce coefficient n'est permise que dans le cas $p(a) \neq 0$. Les valeurs telles que $p(a) = 0$ doivent être étudiées séparément, avant toute division.

Démonstration. Si $p(a) \neq 0$, la multiplication d'une équation par $1/p(a)$ est une opération élémentaire autorisée. Si $p(a) = 0$, ce quotient n'est pas défini ; l'équation doit être conservée et examinée avec cette valeur du paramètre. ■

Exemple 14: Une valeur exceptionnelle

Sur $\mathbb{R}$, considérons

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x+ay=a. \end{cases}$$

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, valable pour tout a, donne $(a-1)y = a-1$.

— Si $a \neq 1$, on divise par $a-1$: $y=1$, puis $x=0$.

— Si $a=1$, la seconde équation devient $0=0$. Il reste $x+y=1$.

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{S}_a = \begin{cases} \{(0,1)\}, & a \neq 1, \\ \{(1-t,t) : t \in \mathbb{R}\}, & a=1. \end{cases}}$$

Exemple 15: Une discussion présentant les trois cas

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résolvons

$$(S_a) : \quad \begin{cases} x+y+z=1, \\ x+ay+z=a, \\ x+y+a^2z=a. \end{cases}$$

En retranchant la première équation aux deux autres, on obtient

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ (a-1)y=a-1, \\ (a^2-1)z=a-1. \end{cases}$$

Si $a \notin \{-1,1\}$. On peut diviser la deuxième équation par $a-1$ et la troisième par a^2-1. On trouve $y=1$, $z=1/(a+1)$, puis $x=-1/(a+1)$.

Si $a=-1$. La dernière équation devient $0=-2$, donc le système est incompatible.

Si $a=1$. Les deux dernières équations deviennent $0=0$. Il reste $x+y+z=1$. En posant $y=s$, $z=t$, on obtient $x=1-s-t$. Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{S}_a = \begin{cases} \{(-1/(a+1), 1, 1/(a+1))\}, & a \notin \{-1,1\}, \\ \varnothing, & a=-1, \\ \{(1-s-t,s,t) : s,t \in \mathbb{R}\}, & a=1. \end{cases}}$$

Bibliographie

[1] **Collectif Exo7, cours d'algèbre.**
Cours de première année, complément pour l'algèbre linéaire ; site Exo7 : https://exo7.emath.fr/.

[2] **Daniel Perrin, Cours d'algèbre.**
Ouvrage de référence (Ellipses), lecture d'approfondissement.