UNIVERSITÉ MOHAMMED V

FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT

Département de Mathématiques

FORMATION UNIVERSITAIRE

Licence – Sciences Mathématiques

Algèbre III

CHAPITRE 2

Espaces vectoriels et dimension finie

Sous-espaces, familles, bases et dimension

SUPPORT DE COURS

Prof. Mohamed Najib LAATABI

najib.laatabi@um5r.ac.ma

mohamednajiblaatabi.com

Toute remarque ou suggestion est la bienvenue. Si vous constatez une erreur dans ce document, merci de bien vouloir la signaler.

Année universitaire • **2026–2027**

Table des matières

Notations **ii**

2 Espaces vectoriels et dimension finie **1**

2.1 Structure d'espace vectoriel 1
2.2 Sous-espaces vectoriels 2
2.3 Combinaisons linéaires et familles génératrices 4
2.4 Familles libres, familles liées et bases 5
2.5 Espaces de dimension finie 6
2.6 Lemme d'échange et invariance de la dimension 7
2.7 Compléter une famille libre, extraire une base 9
2.8 Dimension des sous-espaces vectoriels 9
2.9 Rang d'une famille de vecteurs 13

Bibliographie **15**

Notations

Notation	Signification
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$	Corps des scalaires : réels ou complexes.
E, F, G	Espaces vectoriels ou sous-espaces vectoriels.
$x, y, u, v \in E$	Vecteurs de l'espace vectoriel E.
$\lambda, \mu \in \mathbb{K}$	Scalaires du corps $\mathbb{K}$.
0_E	Vecteur nul de E.
$-x$	Opposé du vecteur x.
$\mathbb{K}^n$	Espace des n-uplets de scalaires de $\mathbb{K}$.
$\mathbb{K}[X]$	Espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
$\mathbb{K}_d[X]$	Espace des polynômes de degré au plus d.
$\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$	Espace des fonctions de I dans $\mathbb{K}$.
$F \subseteq E$	F est une partie de E ; dans le contexte, F peut être un sous-espace vectoriel.
$F \cap G$	Intersection des sous-espaces F et G.
$F \cup G$	Réunion des ensembles F et G.
$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$	Combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$.
$\mathrm{Vect}(A)$	Sous-espace vectoriel engendré par A.
$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$	Ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_p$.
$\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$	Sous-espace engendré par la famille vide.
$(u_1, \ldots, u_p)$	Famille finie de p vecteurs de E.
$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$	Base de E formée de n vecteurs.
$e_1, \ldots, e_n$	Vecteurs d'une base de E.
$\dim E$	Dimension de l'espace vectoriel E.
$\dim_{\mathbb{K}} E$	Dimension de E sur le corps $\mathbb{K}$.
$\dim\{0_E\} = 0$	Dimension de l'espace vectoriel nul.
$F + G$	Somme de deux sous-espaces vectoriels.
$F \oplus G$	Somme directe de F et G.
$E = F \oplus G$	F et G sont supplémentaires dans E.
$F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$	Somme directe de p sous-espaces.
$E \times F$	Produit des espaces vectoriels E et F.
$\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p)$	Rang de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$.

Chapitre

2 Espaces vectoriels et dimension finie

Dans le plan, les vecteurs s'additionnent et se multiplient par des scalaires. Ces opérations existent aussi pour les polynômes, les fonctions et les suites. La notion d'espace vectoriel permet d'étudier leurs propriétés communes. On introduit ensuite les bases et la dimension, en utilisant les systèmes du chapitre 1 pour les calculs. Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Structure d'espace vectoriel

Exemple 1: Le modèle de $\mathbb{R}^2$

Pour $u = (x, y)$, $v = (x', y')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit

$$u + v = (x + x', y + y'), \qquad \lambda u = (\lambda x, \lambda y).$$

Le vecteur nul est $(0, 0)$ et l'opposé de u est $(-x, -y)$. Par exemple,

$$2(1, -1) + 3(0, 2) = (2, 4).$$

La distributivité $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ se vérifie sur chaque coordonnée, à partir de la distributivité dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.1.1: Espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

Soit E un ensemble non vide, muni de deux lois :

$$+ : \ E \times E \longrightarrow E, \quad (x, y) \longmapsto x + y,$$
$$\cdot : \ \mathbb{K} \times E \longrightarrow E, \quad (\lambda, x) \longmapsto \lambda x.$$

On dit que E est un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* si les propriétés suivantes sont vérifiées.

i) $(E, +)$ est un *groupe commutatif*.

ii) Pour tous $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

   a) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

   b) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

   c) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

   d) $1_{\mathbb{K}} x = x$.

Les éléments de E sont appelés *vecteurs*, et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*.

Proposition 2.1.1: Règles élémentaires

Pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$0_{\mathbb{K}} x = 0_E, \qquad \lambda 0_E = 0_E, \qquad (-\lambda)x = -(\lambda x).$$

De plus, $\lambda x = 0_E$ implique $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$.

Démonstration. L'égalité $(0+0)x = 0x + 0x$ donne $0x = 0_E$ par simplification. De même, $\lambda(0_E + 0_E) = \lambda 0_E + \lambda 0_E$ donne $\lambda 0_E = 0_E$. Puis $\lambda x + (-\lambda)x = (\lambda - \lambda)x = 0_E$, donc $(-\lambda)x$ est l'opposé de λx. Enfin, si $\lambda \neq 0$ et $\lambda x = 0_E$, on multiplie par λ^{-1} :

$$x = \lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1} 0_E = 0_E. \qquad \blacksquare$$

Exemple 2: Espaces vectoriels usuels

i) $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel pour les opérations coordonnée par coordonnée.

ii) $\mathbb{K}[X]$ est l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour $d \geq 0$, $\mathbb{K}_d[X]$ désigne les polynômes de degré au plus d, avec le polynôme nul.

iii) Si I est un ensemble, $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ est l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{K}$, avec $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$ et $(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$.

Dans chaque cas, les axiomes se vérifient en utilisant ceux de $\mathbb{K}$, respectivement sur les coordonnées, les coefficients ou les valeurs des fonctions.

Remarque 1: Le corps des scalaires doit être précisé

$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, mais aussi sur $\mathbb{R}$. En revanche, les opérations usuelles ne font pas de $\mathbb{R}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, car $i \cdot 1 \notin \mathbb{R}$: la multiplication externe ne prendrait pas ses valeurs dans l'ensemble annoncé.

2.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 2.2.1: Sous-espace vectoriel

Une partie $F \subset E$ est un *sous-espace vectoriel* de E si elle est elle-même un espace vectoriel pour les opérations de E restreintes à F.

Théorème 2.2.1: Critère pratique de sous-espace

Une partie $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si

$$\boxed{0_E \in F \quad \text{et} \quad \forall x, y \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + \mu y \in F.}$$

On peut remplacer la condition $0_E \in F$ par $F \neq \varnothing$.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Un sous-espace contient son vecteur nul, qui est celui de E, et est stable par addition et multiplication externe. Il contient donc $\lambda x + \mu y$.

($\Leftarrow$) La condition de stabilité donne $x + y \in F$ en prenant $\lambda = \mu = 1$, $-x \in F$ en prenant $\lambda = -1$, $\mu = 0$, et $\lambda x \in F$ en prenant $\mu = 0$. Avec $0_E \in F$, l'addition possède donc un neutre

et des opposés dans F. Les autres axiomes sont hérités de E. Si l'on sait seulement que F est non vide, choisir $u \in F$ et $\lambda = \mu = 0$ donne d'abord $0_E \in F$. ■

Exemple 3: Une équation homogène

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$. Le vecteur nul appartient à F. Si $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ sont dans F, alors

$$(\lambda x + \mu x') - 2(\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') = \lambda(x - 2y + z) + \mu(x' - 2y' + z') = 0.$$

Ainsi F est un sous-espace. En revanche, $G = \{(x, y, z) : x - 2y + z = 1\}$ n'en est pas un, car $0 \notin G$.

Proposition 2.2.1: Solutions d'un système homogène

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. La solution nulle appartient à cet ensemble. Si $x = (x_j)$ et $y = (y_j)$ sont solutions, alors, pour chaque équation d'indice i,

$$\sum_j a_{ij}(\lambda x_j + \mu y_j) = \lambda \sum_j a_{ij} x_j + \mu \sum_j a_{ij} y_j = 0.$$

Le critère de sous-espace s'applique. ■

Exemple 4: Un sous-espace de polynômes

L'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : P(1) = 0\}$ est un sous-espace. En effet, le polynôme nul s'annule en 1 et

$$(\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = 0$$

pour $P, Q \in F$.

Proposition 2.2.2: Intersection de sous-espaces

L'intersection d'une famille de sous-espaces de E est un sous-espace de E.

Démonstration. Tous les sous-espaces contiennent 0_E, donc leur intersection aussi. Si x, y appartiennent à chacun d'eux, $\lambda x + \mu y$ appartient également à chacun d'eux, donc à l'intersection. ■

Remarque 2: La réunion n'est généralement pas un sous-espace

Dans $\mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $G = \{0\} \times \mathbb{R}$ sont des sous-espaces. Mais $(1, 0), (0, 1) \in F \cup G$ alors que $(1, 1) \notin F \cup G$. La réunion n'est pas stable par addition.

2.3 Combinaisons linéaires et familles génératrices

Définition 2.3.1: Combinaison linéaire et espace engendré

Une *combinaison linéaire* de $u_1, \dots, u_p \in E$ est un vecteur $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$, avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$. On note

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i : \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

Pour une partie $A \subset E$, $\mathrm{Vect}(A)$ désigne l'ensemble des combinaisons linéaires *finies* d'éléments de A. Par convention, $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$.

Théorème 2.3.1: Plus petit sous-espace contenant une partie

$\mathrm{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel contenant A. Tout sous-espace contenant A contient aussi $\mathrm{Vect}(A)$.

Démonstration. Le vecteur nul appartient à $\mathrm{Vect}(A)$. Si $x = \sum_i \alpha_i u_i$ et $y = \sum_j \beta_j v_j$, avec $u_i, v_j \in A$, alors

$$\lambda x + \mu y = \sum_i (\lambda \alpha_i) u_i + \sum_j (\mu \beta_j) v_j$$

est encore une combinaison finie d'éléments de A. C'est donc un sous-espace. Il contient A puisque $a = 1a$ pour chaque $a \in A$. Enfin, tout sous-espace contenant A est stable par combinaisons linéaires finies ; il contient donc tous les éléments de $\mathrm{Vect}(A)$. ■

Définition 2.3.2: Famille génératrice

Une famille $(u_1, \dots, u_p)$ est *génératrice de E* si

$$E = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p).$$

Cela signifie que tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison de cette famille.

Exemple 5: Passer d'une équation à des générateurs

Pour $F = \{(x, y, z) : x - 2y + z = 0\}$, on écrit $x = 2y - z$. Alors

$$(x, y, z) = (2y - z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1).$$

Les vecteurs $u = (2, 1, 0)$ et $v = (-1, 0, 1)$ appartiennent à F, et tout élément de F est une de leurs combinaisons. Ainsi $F = \mathrm{Vect}(u, v)$.

2.4 Familles libres, familles liées et bases

Définition 2.4.1: Liberté et liaison

La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est *libre* si

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

Elle est *liée* s'il existe une relation nulle dont les coefficients ne sont pas tous nuls. La famille vide est libre par convention.

Proposition 2.4.1: Caractérisation d'une famille liée

Une famille finie non vide est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Démonstration. Si $\sum_i \lambda_i u_i = 0$ avec $\lambda_j \neq 0$, on isole

$$u_j = -\sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} u_i.$$

Réciproquement, si $u_j = \sum_{i \neq j} \mu_i u_i$, alors $u_j - \sum_{i \neq j} \mu_i u_i = 0$ est une relation non triviale, car le coefficient de u_j est 1. ■

Proposition 2.4.2: Propriétés utiles

Une famille contenant le vecteur nul est liée. Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Toute famille contenant une sous-famille liée est liée.

Démonstration. Si $u_j = 0$, la relation $1u_j = 0$ est non triviale. Toute relation sur une sous-famille se prolonge à la famille entière en mettant des coefficients nuls devant les vecteurs restants. Cela prouve les deux autres affirmations. ■

Exemple 6: Tester la liberté par un système

Pour $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$, la relation $\alpha u + \beta v = 0$ donne $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ par les première et troisième coordonnées. La famille est libre. Si l'on ajoute $w = (1, 2, 1)$, on obtient une famille liée, puisque $w = u + v$.

Définition 2.4.2: Base

Une famille est une *base* de E lorsqu'elle est à la fois libre et génératrice de E.

Théorème 2.4.1: Base et unicité des coordonnées

La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si et seulement si tout $x \in E$ admet une unique écriture

$$\boxed{x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.}$$

Les scalaires $(x_1, \dots, x_n)$ sont ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Le caractère générateur donne l'existence. Si $\sum_i x_i e_i = \sum_i y_i e_i$, alors $\sum_i (x_i - y_i) e_i = 0$. La liberté impose $x_i = y_i$ pour tout i.

($\Leftarrow$) L'existence de l'écriture rend la famille génératrice. Pour une relation $\sum_i \lambda_i e_i = 0$, l'unicité des coordonnées de 0, qui s'écrit déjà $\sum_i 0 e_i$, donne tous les λ_i nuls. La famille est donc libre. ■

Exemple 7: Bases canoniques

Les vecteurs $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ forment une base de $\mathbb{K}^n$, car $(x_1, \dots, x_n) = \sum_i x_i e_i$ de manière unique. De même, $(1, X, \dots, X^d)$ est une base de $\mathbb{K}_d[X]$, par unicité des coefficients d'un polynôme. La famille (u, v) de l'exemple $F = \{x-2y+z = 0\}$ est une base de F : elle est génératrice et les coordonnées y, z montrent sa liberté.

Exemple 8: Calcul de coordonnées dans une autre base

Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, -1))$ est une base. En effet,

$$(x, y) = a(1, 1) + b(1, -1) \iff \begin{cases} a + b = x, \\ a - b = y \end{cases} \iff \begin{cases} a = (x + y)/2, \\ b = (x - y)/2. \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de a, b donnent la propriété de base. Les coordonnées de $(3, 1)$ dans $\mathcal{B}$ sont donc $(2, 1)$.

2.5 Espaces de dimension finie

Définition 2.5.1: Espace de dimension finie

Un espace vectoriel E est dit *de dimension finie* s'il possède une famille génératrice finie :

$$\exists p \in \mathbb{N}, \quad \exists u_1, \dots, u_p \in E, \qquad E = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p).$$

Dans le cas contraire, on dit qu'il est de dimension infinie. La famille vide engendre l'espace nul $\{0\}$ et en est une base.

Lemme 2.5.1: Extraction d'une base

Toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel E contient une sous-famille qui est une base de E.

Démonstration. Soit $G = (u_1, \dots, u_p)$ une famille génératrice. Si elle est libre, elle est déjà une base. Sinon, la caractérisation des familles liées fournit un indice j et des scalaires λ_i tels que

$$u_j = \sum_{i \neq j} \lambda_i u_i.$$

Tout vecteur engendré par G reste engendré par les autres vecteurs, en remplaçant u_j par cette expression. On peut donc supprimer u_j sans changer l'espace engendré.

On recommence si la famille obtenue est encore liée. À chaque suppression, son nombre de vecteurs diminue ; le procédé s'arrête après au plus p suppressions. La famille finale est génératrice et libre, donc c'est une base de E. Pour $E = \{0\}$, elle peut être vide. ■

Corollaire 2.5.1: Existence d'une base finie

Tout espace vectoriel de dimension finie possède une base finie.

Démonstration. Il suffit d'extraire une base d'une famille génératrice finie. ■

Exemple 9: Espaces usuels

La famille canonique $(e_1, \dots, e_n)$ engendre $\mathbb{K}^n$, et $(1, X, \dots, X^d)$ engendre l'espace $\mathbb{K}_d[X]$ des polynômes de degré au plus d. Ces deux espaces sont donc de dimension finie.
En revanche, $\mathbb{K}[X]$ n'est pas engendré par une famille finie. En effet, si $P_1, \dots, P_p$ étaient générateurs, on pourrait choisir un entier d majorant tous leurs degrés. Toute combinaison linéaire des P_i aurait un degré au plus d, et ne pourrait donc pas être égale à X^{d+1}.

2.6 Lemme d'échange et invariance de la dimension

Lemme 2.6.1: Lemme d'échange de Steinitz

Soient $(g_1, \dots, g_m)$ une famille génératrice de E et $(u_1, \dots, u_r)$ une famille libre. Alors $r \leq m$. De plus, on peut remplacer r vecteurs de la première famille par $u_1, \dots, u_r$ en conservant une famille génératrice de m vecteurs.

Démonstration. On introduit les vecteurs u_i un à un. Supposons que, après k étapes, on dispose d'une famille génératrice

$$(u_1, \dots, u_k, h_{k+1}, \dots, h_m),$$

où les h_j sont des vecteurs de la famille initiale non encore remplacés. Pour $k = 0$, c'est la famille donnée.

Si $k < r$, le vecteur u_{k+1} s'écrit

$$u_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{j=k+1}^{m} \beta_j h_j.$$

Au moins un β_j est non nul : sinon u_{k+1} serait combinaison de $u_1, \dots, u_k$, contrairement à la liberté. On peut alors isoler ce h_j :

$$h_j = \frac{1}{\beta_j} \left(u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i - \sum_{\substack{\ell=k+1 \\ \ell \neq j}}^{m} \beta_\ell h_\ell \right).$$

Remplacer h_j par u_{k+1} conserve donc le caractère générateur.

Chaque étape remplace un nouveau vecteur parmi les m vecteurs initiaux. Si $r > m$, après m étapes, $u_1, \dots, u_m$ engendreraient E, et u_{m+1} serait combinaison des précédents : contradiction. Ainsi $r \leq m$, et les r remplacements peuvent être effectués. ■

Théorème 2.6.1: Invariance du nombre de vecteurs d'une base

Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie sont finies et ont le même nombre de vecteurs.

Démonstration. Soit une base finie $(e_1, \dots, e_n)$, dont l'existence a été établie. Toute famille libre possède au plus n vecteurs : une famille libre contenant $n+1$ vecteurs contredirait le lemme d'échange. Une base quelconque est donc finie.

Si $(f_1, \dots, f_p)$ est une autre base, la première est libre et la seconde génératrice ; le lemme donne $n \leq p$. En échangeant leurs rôles, on obtient $p \leq n$. Ainsi $n = p$. ■

Définition 2.6.1: Dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs. Ainsi, si

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \quad \text{est une base de } E,$$

alors

$$\boxed{\dim E = \dim_{\mathbb{K}} E = n.}$$

En particulier,

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}} \{0_E\} = 0.}$$

Exemple 10: Dimensions fondamentales

Les bases canoniques donnent

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n, \qquad \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_d[X] = d+1.}$$

La dimension dépend du corps : $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$, tandis que (1) est une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$. Ainsi $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ et $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

Corollaire 2.6.1: Critères de base en dimension n

Soit $\dim E = n$.

1. Toute famille libre contient au plus n vecteurs.
2. Toute famille génératrice contient au moins n vecteurs.
3. Pour une famille de n vecteurs, être libre, être génératrice et être une base sont des propriétés équivalentes.

Démonstration. Les deux premières affirmations découlent du lemme d'échange, en comparant la famille à une base de E.

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ libre. Si elle n'engendrait pas E, on pourrait choisir v hors de son espace engendré. Une relation $\sum_i \lambda_i u_i + \mu v = 0$ impose $\mu = 0$, sinon elle exprimerait v à l'aide des u_i. Elle impose ensuite tous les λ_i nuls. On aurait donc une famille libre de $n+1$ vecteurs, ce qui est impossible.

Enfin, si une famille génératrice de n vecteurs était liée, on pourrait supprimer l'un de ses vecteurs et obtenir une famille génératrice de $n-1$ vecteurs, ce qui contredit la deuxième affirmation. ■

2.7 Compléter une famille libre, extraire une base

Théorème 2.7.1: Théorème de la base incomplète

Toute famille libre d'un espace de dimension finie peut être complétée en une base. Les vecteurs ajoutés peuvent être choisis dans une famille génératrice finie fixée.

Démonstration. Soient $L = (u_1, \dots, u_r)$ libre et $G = (g_1, \dots, g_m)$ génératrice. Si L n'engendre pas E, au moins un g_j n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(L)$; sinon tous les générateurs, et donc tout E, appartiendraient à ce sous-espace.

La famille obtenue en ajoutant g_j à L est libre, par le même argument que dans la preuve précédente. On recommence si nécessaire. Une famille libre possède au plus $\dim E$ vecteurs ; le procédé s'arrête donc, nécessairement avec une famille libre et génératrice, c'est-à-dire une base. ■

Exemple 11: Compléter une famille dans $\mathbb{R}^3$

Soient $u = (1, 1, 0)$ et $v = (0, 1, 1)$. Une relation $au + bv = 0$ donne $a = 0$ par la première coordonnée, puis $b = 0$ par la troisième. La famille est libre.
Ajoutons $e_3 = (0, 0, 1)$. Une relation $au + bv + ce_3 = 0$ donne

$$a = 0, \qquad a + b = 0, \qquad b + c = 0,$$

donc $a = b = c = 0$. Cette famille libre de trois vecteurs est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 12: Extraire une base d'une famille génératrice

Dans $\mathbb{R}^3$, posons

$$u_1 = (1, 0, 1), \quad u_2 = (0, 1, 0), \quad u_3 = (2, 0, 2), \quad u_4 = (1, 1, 1).$$

Comme $u_3 = 2u_1$ et $u_4 = u_1 + u_2$, on a

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2).$$

Si $au_1 + bu_2 = 0$, les deux premières coordonnées donnent $a = b = 0$. Donc (u_1, u_2) est une base de l'espace engendré par les quatre vecteurs, et cet espace est de dimension 2.

2.8 Dimension des sous-espaces vectoriels

2.8.1 Inclusion et dimension

Proposition 2.8.1: Dimension d'un sous-espace

Si F est un sous-espace d'un espace E de dimension finie, alors F est de dimension finie et

$$\dim F \leq \dim E.$$

De plus,

$$\boxed{F \subset E \text{ et } \dim F = \dim E \iff F = E.}$$

Démonstration. **Existence d'une base finie de F.** Si $F = \{0\}$, la famille vide convient. Sinon, on choisit un vecteur non nul de F, puis, tant que la famille obtenue n'engendre pas F, on lui adjoint un vecteur de F situé hors de son espace engendré. Chaque famille ainsi construite est libre dans E. Son nombre de vecteurs ne peut pas dépasser $n = \dim E$. Le procédé s'arrête donc et donne une base de F ayant au plus n vecteurs.

Cas d'égalité. Si $\dim F = n$, une base de F est une famille libre de n vecteurs de E ; elle est donc une base de E. Ainsi $F = E$. La réciproque est immédiate. ■

Remarque 3: L'inclusion est indispensable

Dans $\mathbb{R}^3$, les sous-espaces $F = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$ ont tous deux dimension 2, mais ils sont distincts. Une égalité de dimensions ne remplace pas une inclusion.

2.8.2 Somme et formule de Grassmann

Définition 2.8.1: Somme et somme directe

Pour deux sous-espaces F, G de E, on pose

$$F + G = \{f + g : f \in F,\ g \in G\}.$$

Cette somme est dite *directe*, et notée $F \oplus G$, si chaque élément de $F + G$ possède une unique décomposition $f + g$.

Proposition 2.8.2: La somme est un sous-espace

$F + G$ est le plus petit sous-espace contenant F et G.

Démonstration. Il contient zéro et, pour $f, f' \in F$, $g, g' \in G$,

$$\lambda(f + g) + \mu(f' + g') = (\lambda f + \mu f') + (\lambda g + \mu g') \in F + G.$$

Il contient F et G, en écrivant $f = f + 0$ et $g = 0 + g$. Tout sous-espace contenant F et G contient aussi chaque somme $f + g$, d'où la propriété minimale. ■

Théorème 2.8.1: Critère de somme directe

$$\boxed{F + G \text{ est directe } \iff F \cap G = \{0_E\}.}$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Si $x \in F \cap G$, les deux décompositions $x = x + 0 = 0 + x$ sont égales par unicité. Ainsi $x = 0$.

($\Leftarrow$) Si $f_1 + g_1 = f_2 + g_2$, alors $f_1 - f_2 = g_2 - g_1$ appartient à $F \cap G$. Si cette intersection est nulle, $f_1 = f_2$ et $g_1 = g_2$. La décomposition est unique. ■

Exemple 13: Deux droites du plan

Dans $\mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}(1, 0)$ et $G = \mathbb{R}(1, 1)$ vérifient $F \cap G = \{0\}$. De plus,

$$(x, y) = (x - y)(1, 0) + y(1, 1).$$

Ainsi $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.

Théorème 2.8.2: Formule de Grassmann

Pour deux sous-espaces F, G d'un espace vectoriel de dimension finie,

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).}$$

Démonstration. Soit $(w_1, \dots, w_r)$ une base de $F \cap G$. Par le théorème de la base incomplète, on la complète en deux bases :

$$\mathcal{B}_F = (w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_p), \qquad \mathcal{B}_G = (w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_q).$$

Montrons que $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ est une base de $F+G$.

Caractère générateur. Tout $x \in F+G$ s'écrit $x = f+g$. On développe f dans $\mathcal{B}_F$ et g dans $\mathcal{B}_G$; en regroupant les coefficients des w_i, on obtient une combinaison des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Liberté. Supposons

$$\sum_i \alpha_i w_i + \sum_j \beta_j u_j + \sum_k \gamma_k v_k = 0.$$

Le vecteur $v = \sum_k \gamma_k v_k$ appartient à G et, d'après cette égalité, à F. Il appartient donc à $F \cap G$ et s'écrit $v = \sum_i \delta_i w_i$. La liberté de $\mathcal{B}_G$ appliquée à

$$\sum_k \gamma_k v_k - \sum_i \delta_i w_i = 0$$

impose tous les γ_k et les δ_i nuls. La relation initiale se réduit à une relation dans $\mathcal{B}_F$; tous les α_i et β_j sont donc nuls.

Ainsi $\mathcal{B}$ est une base, et

$$\dim(F+G) = r+p+q = (r+p)+(r+q)-r.$$ ■

Exemple 14: Deux plans dans $\mathbb{R}^3$

Pour $F = \{(x,y,0)\}$ et $G = \{(x,0,z)\}$, on a $F \cap G = \mathbb{R}(1,0,0)$. Ainsi,

$$\dim(F+G) = 2+2-1 = 3.$$

Puisque $F+G \subset \mathbb{R}^3$, l'égalité des dimensions donne $F+G = \mathbb{R}^3$.

2.8.3 Supplémentaires

Définition 2.8.2: Sous-espaces supplémentaires

Deux sous-espaces F, G de E sont *supplémentaires* si $E = F \oplus G$, c'est-à-dire si tout vecteur de E possède une unique décomposition $f+g$ avec $f \in F$, $g \in G$.

Corollaire 2.8.1: Critère de supplémentarité par les dimensions

En dimension finie,

$$\boxed{E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0\}, \\ \dim F + \dim G = \dim E. \end{cases}}$$

Démonstration. Si $E = F \oplus G$, l'intersection est nulle par le critère de somme directe, et Grassmann donne l'égalité des dimensions. Réciproquement, les deux conditions et Grassmann donnent $\dim(F+G) = \dim E$. Comme $F+G \subset E$, on a $F+G = E$. L'intersection nulle assure l'unicité de la décomposition. ■

Théorème 2.8.3: Existence d'un supplémentaire

Tout sous-espace F d'un espace E de dimension finie possède un supplémentaire, de dimension $\dim E - \dim F$.

Démonstration. Complétons une base $(e_1, \dots, e_r)$ de F en une base $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ de E et posons $G = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$. L'existence et l'unicité des coordonnées dans cette base donnent directement l'existence et l'unicité de la décomposition d'un vecteur en un élément de F et un élément de G. Ainsi $E = F \oplus G$ et $\dim G = n - r$. ■

Exemple 15: Un supplémentaire n'est pas unique

Dans $\mathbb{R}^2$, le sous-espace $F = \mathbb{R}(1,0)$ admet pour supplémentaires $\mathbb{R}(0,1)$ et $\mathbb{R}(1,1)$. Dans chaque cas, l'intersection avec F est nulle et la somme des dimensions vaut 2.

Proposition 2.8.3: Somme directe de plusieurs sous-espaces

Pour $F_1, \dots, F_p \subset E$, on définit $F_1 + \cdots + F_p$ comme l'ensemble des sommes $x_1 + \cdots + x_p$ avec $x_i \in F_i$. La somme est directe si cette écriture est unique, ce qui équivaut à

$$x_1 + \cdots + x_p = 0, \quad x_i \in F_i \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \cdots = x_p = 0.$$

En dimension finie, une somme directe vérifie

$$\dim(F_1 \oplus \cdots \oplus F_p) = \sum_{i=1}^{p} \dim F_i.$$

Démonstration. L'unicité appliquée au vecteur nul donne le critère. Réciproquement, en retranchant deux décompositions d'un même vecteur, le critère impose l'égalité de leurs composantes. Choisissons ensuite une base dans chaque F_i. Leur famille concaténée est génératrice de la somme. Une relation entre ces vecteurs se regroupe en $x_1 + \cdots + x_p = 0$, avec $x_i \in F_i$. Le critère donne $x_i = 0$, puis la liberté de chaque base impose tous les coefficients nuls. La famille concaténée est donc une base, d'où la formule de dimension. ■

Remarque 4: Les intersections deux à deux ne suffisent pas

Dans $\mathbb{R}^2$, les trois droites $\mathbb{R}(1,0)$, $\mathbb{R}(0,1)$ et $\mathbb{R}(1,1)$ ont des intersections deux à deux nulles. Leur somme n'est pourtant pas directe, car

$$(1,0) + (0,1) - (1,1) = 0$$

est une décomposition non triviale du vecteur nul.

Corollaire 2.8.2: Dimension d'un produit

Si E et F sont de dimensions finies, alors

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F.$$

Démonstration. Pour des bases $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_p)$, la famille

$$((e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_p))$$

engendre $E \times F$ en décomposant séparément chaque composante. Une relation nulle donne une relation nulle dans chacune des deux bases, donc tous ses coefficients sont nuls. C'est une base de $n + p$ vecteurs. ■

2.9 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 2.9.1: Rang d'une famille

Le rang d'une famille finie $(u_1, \dots, u_p)$ est

$$\operatorname{rg}(u_1, \dots, u_p) = \dim \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_p).$$

Proposition 2.9.1: Rang, liberté et engendrement

Si $\dim E = n$ et $u_1, \dots, u_p \in E$, alors

$$0 \leq \operatorname{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq \min(n, p).$$

Le rang est le nombre maximal de vecteurs d'une sous-famille libre. De plus,

$$\begin{aligned} (u_1, \dots, u_p) \text{ libre} &\iff \operatorname{rg}(u_1, \dots, u_p) = p, \\ (u_1, \dots, u_p) \text{ génératrice de } E &\iff \operatorname{rg}(u_1, \dots, u_p) = n. \end{aligned}$$

Démonstration. Posons $H = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. On extrait de la famille une base de H : son cardinal est $\dim H$, au plus p et au plus n puisque $H \subset E$. Aucune sous-famille libre ne peut avoir plus de $\dim H$ vecteurs.

Si la famille est libre, elle est une base de H et $\dim H = p$. Réciproquement, si $\dim H = p$, cette famille génératrice de p vecteurs de H est une base. Enfin, $H = E$ équivaut à $\dim H = n$ grâce à l'inclusion $H \subset E$. ■

Proposition 2.9.2: Transformations conservant le rang

Le rang d'une famille ne change pas si l'on permute ses vecteurs, si l'on multiplie l'un d'eux par un scalaire non nul, ou si l'on ajoute à l'un d'eux une combinaison linéaire des autres.

Démonstration. Chacune de ces opérations conserve l'espace engendré. Par exemple, remplacer u_j par $v_j = u_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i u_i$ ne change pas cet espace, car v_j est combinaison de la famille initiale et $u_j = v_j - \sum_{i \neq j} \lambda_i u_i$. La dimension de l'espace engendré est donc conservée. ■

Exemple 16: Rang et paramètre

Dans $\mathbb{R}^3$, considérons

$$u = (1, 0, 1), \quad v = (0, 1, 1), \quad w_a = (1, 1, a).$$

La relation $\alpha u + \beta v + \gamma w_a = 0$ équivaut à

$$\alpha + \gamma = 0, \qquad \beta + \gamma = 0, \qquad \alpha + \beta + a\gamma = 0.$$

En substituant $\alpha = \beta = -\gamma$, on obtient $(a - 2)\gamma = 0$. Si $a \neq 2$, les trois coefficients sont nuls et le rang vaut 3. Si $a = 2$, alors $w_a = u + v$ et (u, v) est libre ; le rang vaut 2.

Bibliographie

[1] **Collectif Exo7, cours d'algèbre.**
Cours de première année, complément pour l'algèbre linéaire ; site Exo7 : https://exo7.emath.fr/.

[2] **Daniel Perrin, Cours d'algèbre.**
Ouvrage de référence (Ellipses), lecture d'approfondissement.