UNIVERSITÉ MOHAMMED V

FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT

Département de Mathématiques

FORMATION UNIVERSITAIRE

Licence – Sciences Mathématiques

Algèbre III

CHAPITRE 3

Applications linéaires

Linéarité, noyau, image, isomorphismes et théorème du rang

SUPPORT DE COURS

Prof. Mohamed Najib LAATABI

najib.laatabi@um5r.ac.ma

mohamednajiblaatabi.com

Toute remarque ou suggestion est la bienvenue. Si vous constatez une erreur dans ce document, merci de bien vouloir la signaler.

Année universitaire • **2026–2027**

Table des matières

Notations **ii**

3 Applications linéaires **1**

3.1 Définition et premiers exemples 1

3.2 Noyau, image et premières caractérisations 2

3.3 Images directes et images réciproques de sous-espaces 4

3.4 Détermination d'une application linéaire sur une base 4

3.5 Opérations sur les applications linéaires 6

3.6 Rang d'une application linéaire 7

3.7 Projecteurs et symétries 9

Bibliographie **12**

Notations

Notation	Signification
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$	Corps des scalaires.
E, F, G	Espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
$u : E \to F$	Application de E dans F.
$\mathcal{L}(E, F)$	Espace des applications linéaires de E dans F.
$\mathcal{L}(E)$	Espace des endomorphismes de E.
id_E	Application identité de E.
$0_{\mathcal{L}(E,F)}$	Application linéaire nulle de E dans F.
$\ker u$	Noyau de u : $\{x \in E : u(x) = 0_F\}$.
$\mathrm{Im}\, u$	Image de u : $\{u(x) : x \in E\}$.
$\mathrm{rg}(u)$	Rang de u : $\dim \mathrm{Im}\, u$.
$u(H)$	Image directe de $H \subseteq E$ par u.
$u^{-1}(G)$	Image réciproque de $G \subseteq F$ par u.
$u^{-1} : F \to E$	Application réciproque, lorsque u est bijective.
$x_0 + \ker u$	Ensemble des solutions de $u(x) = u(x_0)$.
$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$	Base de l'espace vectoriel E.
$(u(e_1), \ldots, u(e_n))$	Famille des images des vecteurs de $\mathcal{B}$.
$u + v$	Somme de deux applications linéaires.
λu	Produit d'une application linéaire par un scalaire.
$v \circ u$	Composée des applications u et v.
u^k	Composée de u avec elle-même k fois.
$\dim \mathcal{L}(E, F)$	Dimension de l'espace des applications linéaires.
$p^2 = p$	Caractérisation d'un projecteur p.
$\mathrm{Im}\, p$	Sous-espace sur lequel s'effectue la projection.
$\ker p$	Sous-espace parallèlement auquel on projette.
$s^2 = \mathrm{id}_E$	Caractérisation d'une symétrie s.
$s = 2p - \mathrm{id}_E$	Symétrie associée au projecteur p.

Chapitre

3 Applications linéaires

Une application linéaire respecte l'addition des vecteurs et la multiplication par les scalaires. Son étude s'appuie sur les sous-espaces, les bases et la dimension du chapitre 2. Le noyau décrit les vecteurs envoyés sur zéro, tandis que l'image décrit les valeurs atteintes. Tous les espaces de ce chapitre sont sur un même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1 Définition et premiers exemples

Définition 3.1.1: Application linéaire

Une application $u : E \to F$ est *linéaire* si

$$\boxed{\forall x, y \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y).}$$

Cela équivaut aux deux conditions $u(x + y) = u(x) + u(y)$ et $u(\lambda x) = \lambda u(x)$. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Définition 3.1.2: Vocabulaire

Une application linéaire de E dans lui-même est un *endomorphisme* ; l'ensemble de ces applications est noté $\mathcal{L}(E)$. Une application linéaire bijective est un *isomorphisme*. Un endomorphisme bijectif est un *automorphisme*. Une application linéaire $E \to \mathbb{K}$ est une *forme linéaire*.

Proposition 3.1.1: Conséquences de la linéarité

Toute application linéaire $u : E \to F$ vérifie

$$u(0_E) = 0_F, \qquad u(-x) = -u(x), \qquad u\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u(x_i).$$

Démonstration. On a $u(0_E) = u(0_{\mathbb{K}} x) = 0_{\mathbb{K}} u(x) = 0_F$, puis $u(-x) = u((-1)x) = -u(x)$. La dernière formule s'obtient par récurrence sur p, à partir de l'additivité et de l'homogénéité. ■

Exemple 1: Une application définie par des coordonnées

L'application $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $u(x, y, z) = (x + y, y + z)$, est linéaire. En effet, pour $a = (x, y, z)$ et $b = (x', y', z')$,

$$\begin{aligned} u(\lambda a + \mu b) &= (\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y', \lambda y + \mu y' + \lambda z + \mu z') \\ &= \lambda(x + y, y + z) + \mu(x' + y', y' + z') \\ &= \lambda u(a) + \mu u(b). \end{aligned}$$

Exemple 2: Dérivation, évaluation et homothétie

— La dérivation $D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$, est linéaire, car $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$.

— Pour $a \in \mathbb{K}$ fixé, l'évaluation $P \mapsto P(a)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$.

— Pour $c \in \mathbb{K}$ fixé, l'homothétie $h_c : E \to E$, $x \mapsto cx$, est linéaire, puisque $c(\lambda x + \mu y) = \lambda cx + \mu cy$.

L'application identité id_E et l'application nulle sont des cas particuliers, pour $c = 1$ et $c = 0$.

Remarque 1: Tester zéro ne suffit pas à prouver la linéarité

L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$, n'est pas linéaire puisque $f(0) = 1$. L'application $g(x) = x^2$ vérifie $g(0) = 0$, mais n'est pas linéaire : $g(1 + 1) = 4 \neq g(1) + g(1) = 2$. Le passage par zéro est nécessaire, mais il n'est pas suffisant.

3.2 Noyau, image et premières caractérisations

Définition 3.2.1: Noyau et image

Pour $u : E \to F$ linéaire, on pose

$$\ker u = \{x \in E : u(x) = 0_F\}, \qquad \operatorname{Im} u = \{u(x) : x \in E\}.$$

Le noyau est une partie de l'espace de départ ; l'image est une partie de l'espace d'arrivée.

Proposition 3.2.1: Le noyau et l'image sont des sous-espaces

$\ker u$ est un sous-espace de E, et $\operatorname{Im} u$ est un sous-espace de F.

Démonstration. **Pour le noyau.** On a $u(0_E) = 0_F$, donc $0_E \in \ker u$. Si $x, y \in \ker u$, alors

$$u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = 0_F,$$

d'où la stabilité.

Pour l'image. Elle contient $0_F = u(0_E)$. Si $a, b \in \operatorname{Im} u$, choisissons $x, y \in E$ avec $a = u(x)$ et $b = u(y)$. Alors

$$\lambda a + \mu b = u(\lambda x + \mu y) \in \operatorname{Im} u.$$

Dans les deux cas, le critère de sous-espace s'applique. ■

Théorème 3.2.1: Injectivité et surjectivité

Pour une application linéaire $u : E \to F$,

$$\boxed{u \text{ injective} \iff \ker u = \{0_E\}, \qquad u \text{ surjective} \iff \operatorname{Im} u = F.}$$

Démonstration. **Injectivité, sens direct.** Si u est injective et $x \in \ker u$, alors $u(x) = 0_F = u(0_E)$, d'où $x = 0_E$. Comme $0_E \in \ker u$, on a l'égalité.

Injectivité, sens réciproque. Si $\ker u = \{0_E\}$ et $u(x) = u(y)$, alors $u(x - y) = 0_F$. Donc $x - y = 0_E$ et $x = y$.

Surjectivité. Par définition, u est surjective si tout vecteur de F est l'image d'au moins un vecteur de E, ce qui est exactement $\operatorname{Im} u = F$. ■

Exemple 3: Déterminer noyau et image sans utiliser la dimension

Pour $u(x, y, z) = (x + y, y + z)$,

$$u(x, y, z) = (0, 0) \iff x = -y,\ z = -y.$$

Ainsi $\ker u = \operatorname{Vect}((-1, 1, -1))$; l'application n'est pas injective. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $u(a, 0, b) = (a, b)$. Donc $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}^2$ et u est surjective.

Proposition 3.2.2: Solutions de l'équation $u(x) = b$

Cette équation possède une solution si et seulement si $b \in \operatorname{Im} u$. Si x_0 est une solution, toutes ses solutions sont

$$\boxed{\{x \in E : u(x) = b\} = x_0 + \ker u = \{x_0 + h : h \in \ker u\}.}$$

Démonstration. L'existence exprime la définition de l'image. Si $u(x_0) = b$, alors

$$u(x) = b \iff u(x) - u(x_0) = 0_F \iff u(x - x_0) = 0_F \iff x - x_0 \in \ker u.$$ ■

Exemple 4: Tous les antécédents d'un vecteur

Avec $u(x, y, z) = (x + y, y + z)$, un antécédent de $(2, 3)$ est $(2, 0, 3)$. Les antécédents sont donc

$$(2, 0, 3) + t(-1, 1, -1) = (2 - t, t, 3 - t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

3.3 Images directes et images réciproques de sous-espaces

Définition 3.3.1: Image directe et image réciproque

Pour $H \subset E$ et $G \subset F$, on note

$$u(H) = \{u(x) : x \in H\}, \qquad u^{-1}(G) = \{x \in E : u(x) \in G\}.$$

La notation $u^{-1}(G)$ désigne une image réciproque d'ensemble ; elle ne suppose pas que u soit bijective.

Proposition 3.3.1: Conservation de la structure de sous-espace

Si H est un sous-espace de E, alors $u(H)$ est un sous-espace de F. Si G est un sous-espace de F, alors $u^{-1}(G)$ est un sous-espace de E.

Démonstration. L'image $u(H)$ contient zéro. Pour $a = u(x)$, $b = u(y)$ avec $x, y \in H$, on a $\lambda a + \mu b = u(\lambda x + \mu y) \in u(H)$, car $\lambda x + \mu y \in H$.

L'image réciproque contient zéro puisque $u(0_E) = 0_F \in G$. Si $x, y \in u^{-1}(G)$, alors $u(x), u(y) \in G$, donc

$$u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) \in G.$$

Ainsi $\lambda x + \mu y \in u^{-1}(G)$. ■

Exemple 5: Une image réciproque calculée par une équation

Pour $u(x, y, z) = (x + y, y + z)$ et $G = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$,

$$u^{-1}(G) = \{(x, y, z) : y + z = 0\} = \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, -1)).$$

Les deux générateurs sont libres ; ce sous-espace est donc de dimension 2.

3.4 Détermination d'une application linéaire sur une base

Théorème 3.4.1: Images prescrites des vecteurs d'une base

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $f_1, \ldots, f_n$ des vecteurs quelconques de F. Il existe une unique application linéaire $u : E \to F$ telle que $u(e_i) = f_i$ pour tout i.

Démonstration. Pour $x = \sum_i x_i e_i$, définissons $u(x) = \sum_i x_i f_i$. L'unicité des coordonnées garantit que cette définition ne dépend d'aucun choix. Les coordonnées de $\lambda x + \mu y$ sont $\lambda x_i + \mu y_i$, donc

$$u(\lambda x + \mu y) = \sum_i (\lambda x_i + \mu y_i) f_i = \lambda u(x) + \mu u(y).$$

L'application est linéaire et a les images prescrites. Inversement, toute application linéaire avec ces images doit satisfaire $u(\sum_i x_i e_i) = \sum_i x_i f_i$; elle est donc unique. ■

Exemple 6: Construire une application dans une base non canonique

La famille $e_1 = (1, 1)$, $e_2 = (1, -1)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Imposons

$$u(e_1) = (1, 0, 1), \qquad u(e_2) = (0, 1, 1).$$

Comme $(x, y) = \frac{x+y}{2}e_1 + \frac{x-y}{2}e_2$, l'unique application linéaire correspondante est

$$u(x, y) = \left(\frac{x + y}{2}, \frac{x - y}{2}, x\right).$$

Proposition 3.4.1: Image, injectivité et surjectivité à partir d'une base

Avec les notations précédentes,

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_n)).$$

De plus, u est injective si et seulement si $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est libre, et surjective si et seulement si cette famille engendre F.

Démonstration. Pour $x = \sum_i x_i e_i$, la linéarité donne $u(x) = \sum_i x_i u(e_i)$; réciproquement, toute combinaison de ces images est l'image de $\sum_i x_i e_i$. Cela prouve la formule et le critère de surjectivité.

Si u est injective, une relation $\sum_i \lambda_i u(e_i) = 0$ donne $u(\sum_i \lambda_i e_i) = 0$, puis $\sum_i \lambda_i e_i = 0$. La liberté de la base impose tous les λ_i nuls. Réciproquement, si les images sont libres et $u(x) = 0$, l'écriture $x = \sum_i x_i e_i$ impose tous les x_i nuls. Ainsi $\ker u = \{0\}$ et u est injective. ■

Corollaire 3.4.1: Isomorphismes et dimension

Deux espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.

Démonstration. Un isomorphisme envoie une base sur une famille libre et génératrice, donc sur une base. Les dimensions sont alors égales. Réciproquement, si $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ sont des bases, l'application définie par $u(e_i) = f_i$ est injective et surjective d'après la proposition précédente. ■

Exemple 7: Isomorphisme de coordonnées

L'application $a + bX + cX^2 \mapsto (a, b, c)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}^3$. Plus généralement, une base d'un espace de dimension n permet de l'identifier à $\mathbb{K}^n$ par ses coordonnées. Cette identification dépend de la base choisie.

3.5 Opérations sur les applications linéaires

Proposition 3.5.1: Espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$

Pour les opérations définies par

$$(u+v)(x)=u(x)+v(x), \qquad (\lambda u)(x)=\lambda u(x),$$

l'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Démonstration. Il est un sous-espace de l'espace des applications de E dans F. Il contient l'application nulle. Pour u,v linéaires, $\lambda,\mu,\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ et $x,y\in E$,

$$\begin{aligned}(\lambda u+\mu v)(\alpha x+\beta y)&=\lambda\Big(\alpha u(x)+\beta u(y)\Big)+\mu\Big(\alpha v(x)+\beta v(y)\Big)\\&=\alpha(\lambda u+\mu v)(x)+\beta(\lambda u+\mu v)(y).\end{aligned}$$

Ainsi $\lambda u+\mu v$ est linéaire, ce qui donne la stabilité. ■

Proposition 3.5.2: Dimension de l'espace des applications linéaires

Si $\dim E=n$ et $\dim F=p$, alors

$$\boxed{\dim\mathcal{L}(E,F)=np.}$$

Démonstration. Fixons une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E. L'application

$$\Phi:\mathcal{L}(E,F)\longrightarrow F^n, \qquad u\longmapsto(u(e_1),\dots,u(e_n))$$

est linéaire par les opérations définies sur $\mathcal{L}(E,F)$. Elle est bijective, car toute liste de n images détermine une unique application linéaire. C'est donc un isomorphisme. Or, par la formule de dimension d'un produit du chapitre 2, $\dim(F^n)=np$. Pour $E=\{0\}$, il n'existe que l'application nulle et les deux dimensions valent zéro. ■

Proposition 3.5.3: Composition et application réciproque

Si $u:E\to F$ et $v:F\to G$ sont linéaires, $v\circ u$ est linéaire. Si u est bijective, sa réciproque $u^{-1}:F\to E$ est linéaire.

Démonstration. Pour la composition,

$$(v\circ u)(\lambda x+\mu y)=v(\lambda u(x)+\mu u(y))=\lambda v(u(x))+\mu v(u(y)).$$

Pour la réciproque, soient $a=u(x)$ et $b=u(y)$. Alors

$$\begin{aligned}u^{-1}(\lambda a+\mu b)&=u^{-1}(\lambda u(x)+\mu u(y))\\&=u^{-1}(u(\lambda x+\mu y))=\lambda u^{-1}(a)+\mu u^{-1}(b).\end{aligned}$$

■

Remarque 2: L'ordre de composition compte

Pour $p(x,y)=(x,0)$ et $s(x,y)=(y,x)$, on trouve

$$(p\circ s)(x,y)=(y,0), \qquad (s\circ p)(x,y)=(0,x).$$

Ces deux endomorphismes sont différents. Pour un endomorphisme u, on note $u^2=u\circ u$, $u^3=u\circ u\circ u$ et $u^0=\mathrm{id}_E$.

3.6 Rang d'une application linéaire

Définition 3.6.1: Rang

Si E est de dimension finie, l'image de $u : E \to F$ est engendrée par les images d'une base de E, donc est de dimension finie. On définit

$$\operatorname{rg}(u) = \dim \operatorname{Im} u.$$

Théorème 3.6.1: Théorème du rang, ou théorème du noyau

Si $u : E \to F$ est linéaire et E de dimension finie, alors

$$\boxed{\dim E = \dim \ker u + \operatorname{rg}(u).}$$

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\ker u$. On la complète en une base

$$(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_s)$$

de E. Montrons que $(u(f_1), \dots, u(f_s))$ est une base de l'image.

Caractère générateur. Pour $y = u(x)$, on écrit $x = \sum_i a_i e_i + \sum_j b_j f_j$. Comme $u(e_i) = 0$,

$$y = \sum_j b_j u(f_j).$$

Liberté. Si $\sum_j \lambda_j u(f_j) = 0$, alors $\sum_j \lambda_j f_j \in \ker u$. Il existe donc des μ_i tels que $\sum_j \lambda_j f_j = \sum_i \mu_i e_i$. La liberté de la base de E impose tous les coefficients nuls, notamment les λ_j.

Ainsi $\operatorname{rg}(u) = s$, $\dim \ker u = r$ et $\dim E = r + s$, ce qui prouve l'égalité. ■

Corollaire 3.6.1: Critères par les dimensions

Si $\dim E = n$ et $\dim F = p$, alors

$$\begin{aligned} u \text{ injective} &\iff \operatorname{rg}(u) = n, \\ u \text{ surjective} &\iff \operatorname{rg}(u) = p. \end{aligned}$$

Une injection impose $n \leq p$, et une surjection impose $n \geq p$. Si $n = p$, injectivité, surjectivité et bijectivité sont équivalentes.

Démonstration. L'injectivité équivaut à un noyau nul, donc à un noyau de dimension zéro ; le théorème du rang donne le premier critère. Comme $\operatorname{Im} u \subset F$, l'égalité $\dim \operatorname{Im} u = \dim F$ équivaut à $\operatorname{Im} u = F$, d'où le second. Enfin, le rang ne dépasse ni n ni p, et les deux critères coïncident si $n = p$. ■

Exemple 8: Dérivation en dimension finie

Pour $d \geq 1$, $D : \mathbb{R}_d[X] \to \mathbb{R}_{d-1}[X]$, $D(P) = P'$, a pour noyau les polynômes constants, de dimension 1. Donc

$$\operatorname{rg}(D) = (d+1) - 1 = d = \dim \mathbb{R}_{d-1}[X].$$

Ainsi D est surjective, mais pas injective puisque $D(1) = 0$.

Exemple 9: Calcul complet avec le théorème du rang

Soit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $u(x, y, z, t) = (x + y, y + z, z + t)$. Les équations du noyau donnent $x = -y$, $z = -y$, $t = y$. Ainsi

$$\ker u = \mathrm{Vect}((-1, 1, -1, 1)), \qquad \mathrm{rg}(u) = 4 - 1 = 3.$$

L'application est surjective et non injective. Pour retrouver directement son image, on peut noter que $u(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 0)$, $u(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ et $u(0, 1, 0, 0) - u(1, 0, 0, 0) = (0, 1, 0)$.

Remarque 3: Une égalité de dimensions n'est pas une décomposition

Le théorème du rang n'affirme pas $E = \ker u \oplus \mathrm{Im}\, u$. L'image est un sous-espace de F, et non nécessairement de E. Même pour $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $u(x, y) = (y, 0)$, on a $\ker u = \mathrm{Im}\, u = \mathbb{R}(1, 0)$: leur somme n'est pas directe.

Proposition 3.6.1: Caractérisation de la bijectivité en dimension finie

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, avec

$$\dim E = \dim F = n < +\infty.$$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\boxed{\begin{aligned} u \text{ injective} &\iff u \text{ surjective} \\ &\iff u \text{ bijective} \\ &\iff \ker u = \{0_E\} \\ &\iff \mathrm{Im}\, u = F \\ &\iff \mathrm{rg}(u) = n. \end{aligned}}$$

De plus, pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E,

$$\boxed{u \text{ bijective} \iff (u(e_1), \ldots, u(e_n)) \text{ est une base de } F.}$$

Démonstration. D'après le théorème du rang,

$$\dim E = \dim \ker u + \mathrm{rg}(u).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u \text{ injective} &\iff \ker u = \{0_E\} \\ &\iff \dim \ker u = 0 \\ &\iff \mathrm{rg}(u) = n. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $\mathrm{Im}\, u \subseteq F$ et $\dim F = n$,

$$\begin{aligned} u \text{ surjective} &\iff \mathrm{Im}\, u = F \\ &\iff \dim \mathrm{Im}\, u = n \\ &\iff \mathrm{rg}(u) = n. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{u \text{ injective} \iff u \text{ surjective} \iff u \text{ bijective.}}$$

Enfin, pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E,

$$u \text{ bijective} \iff \begin{cases} (u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ libre,} \\ (u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ génératrice de } F \end{cases}$$
$$\iff (u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ est une base de } F.$$

■

Corollaire 3.6.2: Cas d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors :

$$\boxed{\begin{aligned} u \text{ injective} &\iff u \text{ surjective} \\ &\iff u \text{ bijective} \\ &\iff \ker u = \{0_E\} \\ &\iff \operatorname{Im} u = E \\ &\iff \operatorname{rg}(u) = \dim E. \end{aligned}}$$

3.7 Projecteurs et symétries

3.7.1 Projection associée à une somme directe

Définition 3.7.1: Projection sur un sous-espace

Si $E = F \oplus G$, tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = f + g$, avec $f \in F$ et $g \in G$. La *projection sur F parallèlement à G* est l'application

$$p : E \to E, \qquad p(f + g) = f.$$

Proposition 3.7.1: Propriétés d'une projection

La projection p est linéaire et vérifie

$$\boxed{p^2 = p, \qquad \operatorname{Im} p = F, \qquad \ker p = G.}$$

Démonstration. Si $x = f + g$ et $x' = f' + g'$, la décomposition de $\lambda x + \mu x'$ est $(\lambda f + \mu f') + (\lambda g + \mu g')$. Ainsi $p(\lambda x + \mu x') = \lambda f + \mu f' = \lambda p(x) + \mu p(x')$. Pour $f \in F$, on a $f = f + 0$, donc $p(f) = f$. Il en résulte $p(p(x)) = p(f) = f = p(x)$, et l'image est exactement F. Enfin, $p(f + g) = 0$ équivaut à $f = 0$, donc à $x \in G$; ainsi $\ker p = G$. ■

Théorème 3.7.1: Caractérisation des projecteurs

Un endomorphisme p vérifiant $p^2 = p$ est appelé *projecteur*. Alors

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p,$$

et p est la projection sur son image parallèlement à son noyau.

Démonstration. Pour tout $x \in E$, écrivons

$$x = p(x) + (x - p(x)).$$

Le premier terme appartient à $\operatorname{Im} p$ et le second à $\ker p$, car $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0$. Donc la somme vaut E. Si $y \in \operatorname{Im} p \cap \ker p$, il existe z tel que $y = p(z)$ et $p(y) = 0$. Alors $y = p(z) = p^2(z) = p(y) = 0$, d'où la somme directe. La décomposition affichée montre que p en extrait la composante dans l'image. ■

Exemple 10: Projection suivant une droite du plan

Avec $F = \mathbb{R}(1, 0)$ et $G = \mathbb{R}(1, 1)$, on a

$$(x, y) = (x - y, 0) + (y, y).$$

La projection sur F parallèlement à G est donc $p(x, y) = (x - y, 0)$. On vérifie $p^2 = p$, $\operatorname{Im} p = F$ et $\ker p = G$.

3.7.2 Symétries

Définition 3.7.2: Symétrie associée à une somme directe

Si $E = F \oplus G$, la *symétrie par rapport à F parallèlement à G* est

$$s(f + g) = f - g.$$

Si p est la projection sur F parallèlement à G, alors $s = 2p - \mathrm{id}_E$.

Théorème 3.7.2: Caractérisation des symétries

Une symétrie est linéaire et vérifie $s^2 = \mathrm{id}_E$; elle est donc un automorphisme d'inverse elle-même. Réciproquement, si un endomorphisme s vérifie $s^2 = \mathrm{id}_E$, alors

$$E = \ker(s - \mathrm{id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{id}_E),$$

et s est la symétrie associée à cette décomposition.

Démonstration. Pour une symétrie associée à $F \oplus G$, la formule $s = 2p - \mathrm{id}_E$ donne la linéarité. Puis $s^2(f + g) = s(f - g) = f + g$.

Réciproquement, supposons $s^2 = \mathrm{id}_E$. Pour tout x, posons

$$f = \frac{x + s(x)}{2}, \qquad g = \frac{x - s(x)}{2}.$$

Alors $x = f + g$, $s(f) = f$ et $s(g) = -g$. Donc $f \in \ker(s - \mathrm{id}_E)$ et $g \in \ker(s + \mathrm{id}_E)$. Si un vecteur y appartient aux deux noyaux, $s(y) = y = -y$, donc $2y = 0$ et $y = 0$. La somme est directe, et la formule $s(f + g) = f - g$ conclut. ■

Exemple 11: Échange de deux coordonnées

L'application $s(x,y)=(y,x)$ vérifie $s^2=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Les équations $s(x,y)=(x,y)$ et $s(x,y)=-(x,y)$ donnent respectivement

$$F=\mathbb{R}(1,1), \qquad G=\mathbb{R}(1,-1).$$

C'est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Bibliographie

[1] **Collectif Exo7, cours d'algèbre.**
Cours de première année, complément pour l'algèbre linéaire ; site Exo7 : https://exo7.emath.fr/.

[2] **Daniel Perrin, Cours d'algèbre.**
Ouvrage de référence (Ellipses), lecture d'approfondissement.