UNIVERSITÉ MOHAMMED V

FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT

Département de Mathématiques

FORMATION UNIVERSITAIRE

Licence – Sciences Mathématiques

# Algèbre III

CHAPITRE 4

## Matrices

Opérations, rang, inversibilité et changement de base

SUPPORT DE COURS

**Prof. Mohamed Najib LAATABI**

najib.laatabi@um5r.ac.ma

mohamednajiblaatabi.com

*Toute remarque ou suggestion est la bienvenue. Si vous constatez une erreur dans ce document, merci de bien vouloir la signaler.*

Année universitaire • **2026–2027**

# Table des matières

**Notations** **ii**

**4 Matrices** **1**

4.1 Généralités et types de matrices . . . . . 1
4.2 L'espace vectoriel des matrices . . . . . 4
4.3 Produit de deux matrices . . . . . 7
4.4 Matrices carrées et puissances . . . . . 11
4.5 Matrices inversibles . . . . . 12
4.6 Méthode de Gauss–Jordan et rang . . . . . 14
4.7 Matrice d'une application linéaire . . . . . 23
4.8 Changement de base . . . . . 25

**Bibliographie** **27**

# Notations

| Notation | Signification |
|---|---|
| $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ | Espace des matrices à $m$ lignes et $n$ colonnes. |
| $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ | Espace des matrices carrées d'ordre $n$. |
| $A = (a_{ij})$ | Matrice de coefficient général $a_{ij}$. |
| $a_{ij}$ | Coefficient situé à la ligne $i$ et à la colonne $j$. |
| $A^T$ | Transposée de la matrice $A$. |
| $\mathrm{tr}(A)$ | Trace de $A$ : somme de ses coefficients diagonaux. |
| $0_{m,n}$ | Matrice nulle de taille $m \times n$. |
| $I_n$ | Matrice identité d'ordre $n$. |
| $E_{ij}$ | Matrice canonique ayant 1 en position $(i, j)$ et 0 ailleurs. |
| $AB = BA$ | Matrices $A$ et $B$ commutatives entre elles. |
| $A^T = A$ | Matrice symétrique. |
| $A^T = -A$ | Matrice antisymétrique. |
| $A^{-1}$ | Inverse de la matrice inversible $A$. |
| $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ | Ensemble des matrices inversibles d'ordre $n$. |
| $\mathrm{rg}(A)$ | Rang de la matrice $A$. |
| $AX = b$ | Écriture matricielle d'un système linéaire. |
| $[A \mid b]$ | Matrice augmentée du système $AX = b$. |
| $[A \mid I_n]$ | Tableau utilisé pour calculer $A^{-1}$. |
| $L_i \leftrightarrow L_j$ | Échange de deux lignes. |
| $L_i \leftarrow \lambda L_i$ | Multiplication d'une ligne par $\lambda \neq 0$. |
| $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ | Addition d'un multiple d'une autre ligne. |
| $C_j$ | $j$-ième colonne de la matrice $A$. |
| $u_A : X \mapsto AX$ | Application linéaire associée à $A$. |
| $\mathrm{Im}\, u_A$ | Image de l'application linéaire associée à $A$. |
| $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ | Bases des espaces vectoriels considérés. |
| $[x]_{\mathcal{B}}$ | Colonne des coordonnées de $x$ dans $\mathcal{B}$. |
| $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)$ | Matrice de $u : E \to F$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. |
| $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ | Matrice d'un endomorphisme dans la base $\mathcal{B}$. |
| $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ | Matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$. |
| $[x]_{\mathcal{B}} = P[x]_{\mathcal{B}'}$ | Formule de changement de coordonnées. |
| $A' = P^{-1}AP$ | Relation de similitude entre deux matrices carrées. |
| $A' = Q^{-1}AP$ | Changement de bases au départ et à l'arrivée. |

Chapitre

# 4 Matrices

Les chapitres précédents ont présenté les systèmes, les espaces vectoriels, la dimension et les applications linéaires. Les matrices permettent maintenant d'organiser les calculs et de représenter les applications linéaires dans des bases. On construit d'abord les opérations matricielles, puis on étudie l'inversibilité, le rang et les changements de base. Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 4.1 Généralités et types de matrices

### 4.1.1 Notations

**Définition 4.1.1: Matrice à $m$ lignes et $n$ colonnes**

Une matrice de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

L'indice $i$ désigne la ligne et l'indice $j$ la colonne. L'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Deux matrices sont égales si elles ont la même taille et des coefficients égaux aux mêmes positions.

**Exemple 1: Lignes, colonnes et coefficients**

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, on a $a_{23} = 6$. Sa première ligne est $(1, 2, 3)$ et sa deuxième colonne est $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Une matrice de taille $1 \times n$ est une matrice ligne ; une matrice de taille $m \times 1$ est une matrice colonne.

**Définition 4.1.2: Matrices particulières**

Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *carrée d'ordre $n$*.

Matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \iff a_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

Matrice triangulaire supérieure

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \iff a_{ij} = 0 \quad (i > j).$$

Matrice triangulaire inférieure

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \iff a_{ij} = 0 \quad (i < j).$$

Matrice nulle

$$0_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}).$$

Matrice identité

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exemple 2: Matrices diagonale et triangulaire**

Les matrices

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sont respectivement diagonale et triangulaire supérieure. Toute matrice diagonale est à la fois triangulaire supérieure et inférieure.

### Remarque 1: Propriétés des matrices particulières

Pour toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\boxed{\begin{array}{l} A \text{ diagonale} \Longrightarrow \begin{cases} A \text{ triangulaire supérieure,} \\ A \text{ triangulaire inférieure.} \end{cases} \\ \\ A \text{ diagonale} \iff a_{ij} = 0 \quad (i \neq j). \end{array}}$$

En particulier,

$$\boxed{I_n \text{ et } 0_{n,n} \text{ sont diagonales.}}$$

### Définition 4.1.3: Transposé

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
La *transposée* de $A$, notée $A^T$, est définie par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

avec

$$A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}), \qquad (A^T)_{ij} = a_{ji}.$$

### Exemple 3: Matrices transposée

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

### Définition 4.1.4: Trace d'une matrice carrée

Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *symétrique* si

$$A^T = A \iff a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j.$$

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *antisymétrique* si

$$A^T = -A \iff a_{ij} = -a_{ji}, \quad \forall i, j.$$

En particulier,

$$a_{ii} = 0, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

**Exemple 4: Trace, matrices symétriques et antisymétriques**

Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{tr}(A) = 2 + 4 + 5 = 11,$$
$$\operatorname{tr}(B) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

On a

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = A.$$

Ainsi,

$$A^T = A \Longrightarrow A \text{ est symétrique.}$$

On a

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -B.$$

Ainsi,

$$B^T = -B \Longrightarrow B \text{ est antisymétrique.}$$

## 4.2 L'espace vectoriel des matrices

**Définition 4.2.1: Somme et multiplication par un scalaire**

Pour $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad (\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Une somme de matrices exige donc qu'elles aient la même taille.

**Proposition 4.2.1: Structure vectorielle et base canonique**

Pour $m, n \geq 1$, l'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$, on définit

$$E_{ij} = (e_{k\ell}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \qquad e_{k\ell} = \begin{cases} 1, & (k,\ell) = (i,j), \\ 0, & (k,\ell) \neq (i,j). \end{cases}$$

Ainsi,

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ ligne } i$$

où le coefficient 1 est situé à la colonne $j$.
La famille

$$\boxed{\mathcal{B} = (E_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}}$$

est une *base canonique* de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
En particulier,

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = mn.}$$

*Démonstration.* **Structure d'espace vectoriel.**

Soient $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Les opérations sont définies par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \qquad \lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

On a, pour tous $i, j$,

$$\begin{aligned} ((A+B)+C)_{ij} &= (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} \\ &= a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}), \\ (A+B)_{ij} &= a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}, \\ (A + 0_{m,n})_{ij} &= a_{ij}, \\ (A + (-A))_{ij} &= 0. \end{aligned}$$

Donc $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe commutatif.

De même,

$$\begin{aligned} \lambda(A+B) &= \lambda A + \lambda B, \\ (\lambda+\mu)A &= \lambda A + \mu A, \\ (\lambda\mu)A &= \lambda(\mu A), \\ 1_{\mathbb{K}} A &= A. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**Caractère générateur.**

Pour toute matrice $A = (a_{ij})$,

$$\boxed{A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}.}$$

Par conséquent,

$$\operatorname{Vect}(E_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}).$$

**Liberté.**

Soient $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}$. Alors

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}E_{ij} = 0_{m,n} \iff (\lambda_{ij}) = 0_{m,n}$$
$$\iff \lambda_{ij} = 0, \quad \forall i, j.$$

Donc la famille $(E_{ij})$ est libre.

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{B} = (E_{ij}) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}).}$$

Enfin,

$$\operatorname{card}(\mathcal{B}) = mn \Longrightarrow \boxed{\dim \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = mn.}$$

■

**Exemple 5: Base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**

On a

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour toute matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

on a

$$\boxed{A = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}.}$$

Ainsi,

$$\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$$

est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et

$$\boxed{\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4.}$$

**Exemple 6: Somme et multiple**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, la base canonique comporte les quatre matrices $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$.

**Proposition 4.2.2: Linéarité de la transposition et de la trace**

Pour des matrices de même taille,

$$(A+B)^T = A^T + B^T, \qquad (\lambda A)^T = \lambda A^T, \qquad (A^T)^T = A.$$

Pour des matrices carrées de même ordre,

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B), \qquad \operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A).$$

*Démonstration.* Par exemple, $((A+B)^T)_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = (A^T + B^T)_{ij}$. Les deux autres identités de transposition s'obtiennent de la même manière. Pour la trace, il suffit de sommer les égalités $(A+B)_{ii} = a_{ii} + b_{ii}$ et $(\lambda A)_{ii} = \lambda a_{ii}$. ■

**Proposition 4.2.3: Décomposition symétrique et antisymétrique**

Toute matrice carrée sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique :

$$\boxed{A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}.}$$

*Démonstration.* Posons $S = (A + A^T)/2$ et $H = (A - A^T)/2$. Les identités de transposition donnent $S^T = S$ et $H^T = -H$, avec $A = S + H$. Si $A = S' + H'$ est une autre décomposition, alors $S - S' = H' - H$ est à la fois symétrique et antisymétrique. Sa transposée est égale à elle-même et à son opposée ; elle est donc nulle, puisque $2 \neq 0$ dans $\mathbb{K}$. Ainsi $S = S'$ et $H = H'$. ■

## 4.3 Produit de deux matrices

### 4.3.1 Définition et règles de calcul

**Définition 4.3.1: Produit matriciel**

Pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le produit $AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ est défini par

$$\boxed{(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.}$$

Le nombre de colonnes du premier facteur doit être égal au nombre de lignes du second. On multiplie la ligne $i$ de $A$ par la colonne $j$ de $B$ pour obtenir le coefficient $(i, j)$.

**Exemple 7: Produit de matrices rectangulaires**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, le coefficient $(2, 2)$ vaut $0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 11$. Le résultat est de taille $2 \times 2$.

**Théorème 4.3.1: Associativité, distributivité et identité**

Pour toutes matrices de tailles compatibles,

$$(AB)C = A(BC), \qquad A(B + C) = AB + AC, \qquad (A + B)C = AC + BC.$$

De plus, $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$, et, pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,

$$I_m A = A = A I_n.$$

*Démonstration.* Pour $A$ de taille $m \times n$, $B$ de taille $n \times p$ et $C$ de taille $p \times q$,

$$\begin{aligned}((AB)C)_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{p} \left( \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k\ell} \right) c_{\ell j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left( \sum_{\ell=1}^{p} b_{k\ell} c_{\ell j} \right) = (A(BC))_{ij}.\end{aligned}$$

On a seulement échangé deux sommes finies. La distributivité se vérifie de même :

$$(A(B+C))_{ij} = \sum_{k} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = (AB)_{ij} + (AC)_{ij}.$$

L'autre distributivité et les règles de scalaires se vérifient coefficient par coefficient. Enfin, dans un produit avec $I_n$ ou $I_m$, seul le terme correspondant à un coefficient diagonal égal à 1 subsiste. ■

**Remarque 2: Produit matriciel : dimensions**

Pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,

$$\boxed{AB \text{ est défini } \iff n = p, \qquad AB \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K}).}$$

**Remarque 3: Produit matriciel : non-commutativité**

Le produit n'est pas commutatif en général. Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

De plus,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_{2,2},$$

alors qu'aucun facteur n'est nul. Ainsi,

$$\boxed{AB = 0 \not\Rightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0).}$$

**Proposition 4.3.1: Transposée et trace d'un produit**

Pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

$$\boxed{(AB)^T = B^T A^T.}$$

Si $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

*Démonstration.* On a

$$((AB)^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik} (A^T)_{kj}.$$

C'est le coefficient $(i,j)$ de $B^TA^T$. Pour la trace,

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ik} = \operatorname{tr}(BA).$$

■

### 4.3.2 Systèmes et application linéaire associée

**Proposition 4.3.2: Produit par une colonne**

Soient $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Pour $X = (x_1,\dots,x_n)^T$,

$$AX = x_1C_1 + \cdots + x_nC_n.$$

L'application $u_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $X \mapsto AX$, est linéaire et son image est $\operatorname{Vect}(C_1,\dots,C_n)$.

*Démonstration.* Soient

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

En notant $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de $A$,

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix}$$

$$= x_1C_1 + \cdots + x_nC_n.$$

Pour $X, Y \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} u_A(\lambda X + \mu Y) &= A(\lambda X + \mu Y) \\ &= \lambda AX + \mu AY \\ &= \lambda u_A(X) + \mu u_A(Y). \end{aligned}$$

Donc $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$.

Par définition,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} u_A &= \{AX : X \in \mathbb{K}^n\} \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_jC_j : (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n \right\} \\ &= \operatorname{Vect}(C_1,\dots,C_n). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Im} u_A = \operatorname{Vect}(C_1,\dots,C_n).$$

■

**Définition 4.3.2: Écriture matricielle d'un système et rang**

Le système $\sum_j a_{ij}x_j = b_i$ s'écrit $AX = b$, où $X$ et $b$ sont des colonnes. On appelle *rang de* $A$ le rang de ses colonnes, c'est-à-dire

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(u_A) = \dim \operatorname{Im} u_A.$$

En particulier, $0 \leq \operatorname{rg}(A) \leq \min(m, n)$.

**Exemple 8: Écriture matricielle et rang**

Considérons le système linéaire

$$(S) : \quad \begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x + 2y + 2z = 4, \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

Son écriture matricielle est

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}.$$

Les colonnes de $A$ sont

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que

$$C_3 = C_1,$$

et

$$\alpha C_1 + \beta C_2 = 0 \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0, \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0.$$

Ainsi, $(C_1, C_2)$ est libre et

$$\operatorname{Im} u_A = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \operatorname{Vect}(C_1, C_2).$$

Par conséquent,

$$\boxed{\operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Im} u_A = 2.}$$

On vérifie bien que

$$0 \leq \operatorname{rg}(A) = 2 \leq \min(3, 3) = 3.$$

## 4.4 Matrices carrées et puissances

**Définition 4.4.1: Puissances**

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $A^0 = I_n$ et $A^{k+1} = A^k A$ pour $k \geq 0$.

**Proposition 4.4.1: Puissances et formule du binôme**

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on a $A^{p+q} = A^p A^q$ et $(A^p)^q = A^{pq}$. Si $AB = BA$, alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{(A+B)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} A^k B^{r-k}.}$$

*Démonstration.* L'identité $A^{p+q} = A^p A^q$ se prouve par récurrence sur $q$. Elle est vraie pour $q = 0$ ; si elle est vraie pour $q$, alors

$$A^{p+q+1} = (A^p A^q)A = A^p A^{q+1}.$$

La seconde identité se déduit par récurrence en multipliant par $A^p$.

Pour le binôme, la formule est vraie pour $r = 0$. Supposons-la vraie au rang $r$. On multiplie par $A + B$. Comme $A$ et $B$ commutent, on peut regrouper les termes en $A^k B^{r+1-k}$. Pour $1 \leq k \leq r$, leur coefficient est

$$\binom{r}{k-1} + \binom{r}{k} = \binom{r+1}{k}.$$

Les deux termes extrêmes ont coefficient 1. On obtient donc la formule au rang $r + 1$. ■

**Exemple 9: Une puissance calculée sans multiplications successives**

Pour $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $N^2 = 0$. Une matrice dont une puissance est nulle est dite *nilpotente*. Comme $I_2$ commute avec $N$, le binôme donne

$$(I_2 + N)^p = I_2 + pN = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (p \in \mathbb{N}).$$

**Remarque 4: Puissances d'une somme**

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

En particulier,

$$AB = BA \Longrightarrow (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

## 4.5 Matrices inversibles

**Définition 4.5.1: Matrice inversible**

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *inversible* s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. On note $A^{-1}$ son inverse et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles.

**Proposition 4.5.1: Unicité et règles d'inversion**

L'inverse, lorsqu'il existe, est unique. Pour $A, B$ inversibles,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \qquad (A^{-1})^{-1} = A.$$

*Démonstration.* Si $C$ et $D$ sont des inverses de $A$, alors

$$C = C(AD) = (CA)D = D.$$

Pour le produit,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = I_n,$$

et $B^{-1}A^{-1}AB = I_n$ de la même façon. La transposition des égalités $AA^{-1} = I_n$ et $A^{-1}A = I_n$ montre que $(A^{-1})^T$ est une inverse bilatère de $A^T$. Enfin, $A$ est par définition une inverse de $A^{-1}$. ■

**Théorème 4.5.1: Critères d'inversibilité**

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $A$ est inversible ;
2. $AX = 0$ a pour seule solution $X = 0$ ;
3. $\mathrm{rg}(A) = n$ ;
4. pour tout $b \in \mathbb{K}^n$, le système $AX = b$ a une solution unique.

*Démonstration.* Soit $u_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $X \mapsto AX$.

**(1) $\Longrightarrow$ (2).**

Supposons $A$ inversible. Alors

$$AX = 0 \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}0 \Longrightarrow X = 0.$$

Donc

$$\ker u_A = \{0\}.$$

**(2) $\Longrightarrow$ (3).**

Si $AX = 0 \Longrightarrow X = 0$, alors $\ker u_A = \{0\}$.

D'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{K}^n &= \dim \ker u_A + \mathrm{rg}(u_A) \\ &= 0 + \mathrm{rg}(A). \end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{rg}(A) = n.$$

**(3) $\Longrightarrow$ (4).**

Supposons $\mathrm{rg}(A) = n$. Alors

$$\dim \mathrm{Im}\, u_A = n = \dim \mathbb{K}^n.$$

Puisque $\mathrm{Im}\, u_A \subseteq \mathbb{K}^n$,

$$\mathrm{Im}\, u_A = \mathbb{K}^n.$$

Donc $u_A$ est surjective.

De plus, le théorème du rang donne

$$\dim \ker u_A = n - \mathrm{rg}(A) = 0,$$

d'où $\ker u_A = \{0\}$.

Ainsi, $u_A$ est bijective, donc

$$\forall b \in \mathbb{K}^n, \quad \exists!\, X \in \mathbb{K}^n : \ AX = b.$$

**(4) $\Longrightarrow$ (1).**

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe un unique $X_j \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$AX_j = e_j.$$

Posons

$$B = (X_1 \ \cdots \ X_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Alors

$$AB = (AX_1 \ \cdots \ AX_n) = (e_1 \ \cdots \ e_n) = I_n.$$

D'autre part, l'unicité des solutions de $AX = b$ implique $\ker u_A = \{0\}$.

Or,

$$A(BA - I_n) = ABA - A = A - A = 0_{n,n}.$$

Ainsi, colonne par colonne,

$$BA - I_n = 0_{n,n},$$

donc

$$AB = BA = I_n.$$

Par conséquent, $A$ est inversible et $B = A^{-1}$.

Finalement,

$$\boxed{(1) \iff (2) \iff (3) \iff (4).}$$

■

**Corollaire 4.5.1: Une inverse d'un seul côté suffit dans le cas carré**

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient $AB = I_n$, alors $A$ et $B$ sont inversibles et $BA = I_n$.

*Démonstration.* Pour tout $b$, on a $A(Bb) = b$ ; $u_A$ est donc surjective, puis bijective par égalité des dimensions. Ainsi $A$ est inversible et $B = A^{-1}AB = A^{-1}$. ■

**Remarque 5: Inversibilité : caractérisations équivalentes**

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\boxed{\begin{aligned} A \text{ inversible} &\iff \operatorname{rg}(A) = n \\ &\iff \ker u_A = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \\ &\iff \operatorname{Im} u_A = \mathbb{K}^n \\ &\iff \big(\forall X \in \mathbb{K}^n,\ AX = 0 \Longrightarrow X = 0\big). \end{aligned}}$$

De plus, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\boxed{AB = I_n \iff BA = I_n \iff B = A^{-1}.}$$

# 4.6 Méthode de Gauss–Jordan et rang

## 4.6.1 Opérations élémentaires et matrices associées

**Proposition 4.6.1: Réalisation des opérations sur les lignes**

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
Toute opération élémentaire sur les lignes de $A$ s'écrit

$$\boxed{A' = PA, \qquad P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}),}$$

où $P$ est obtenue en effectuant la même opération sur $I_m$.
Plus précisément, pour $i \neq j$ :

**1. Échange de deux lignes**

$$L_i \leftrightarrow L_j \quad \Longleftrightarrow \quad A' = P_{ij}A,$$

avec

$$P_{ij} = I_m - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}.$$

**2. Multiplication d'une ligne**

$$L_i \longleftarrow \lambda L_i, \quad \lambda \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A' = D_i(\lambda)A,$$

avec

$$D_i(\lambda) = I_m + (\lambda - 1)E_{ii}.$$

**3. Addition d'un multiple d'une ligne**

$$L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j \quad \Longleftrightarrow \quad A' = T_{ij}(\lambda)A,$$

avec

$$T_{ij}(\lambda) = I_m + \lambda E_{ij}.$$

Ici, $E_{ij} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ désigne la matrice canonique de position $(i, j)$.

*Démonstration.* Notons $L_1, \ldots, L_m$ les lignes de $A$.

Pour $1 \leq i, j \leq m$, on a

$$E_{ij}A = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{ligne } i.$$

Ainsi,

$$P_{ij}A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}, \quad D_i(\lambda)A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \lambda L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}, \quad T_{ij}(\lambda)A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + \lambda L_j \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} P_{ij}^2 &= I_m, \\ D_i(\lambda)D_i(\lambda^{-1}) &= I_m, \\ T_{ij}(\lambda)T_{ij}(-\lambda) &= I_m. \end{aligned}$$

En effet, pour $i \neq j$,

$$E_{ij}^2 = 0_{m,m},$$

d'où

$$\begin{aligned} T_{ij}(\lambda)T_{ij}(-\lambda) &= (I_m + \lambda E_{ij})(I_m - \lambda E_{ij}) \\ &= I_m - \lambda^2 E_{ij}^2 \\ &= I_m. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} P_{ij}^{-1} &= P_{ij}, \\ D_i(\lambda)^{-1} &= D_i(\lambda^{-1}), \\ T_{ij}(\lambda)^{-1} &= T_{ij}(-\lambda). \end{aligned}$$

Les trois matrices élémentaires sont donc inversibles. ■

**Exemple 10: Opérations élémentaires et produit matriciel**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}).$$

**1. Échange :** $L_1 \leftrightarrow L_3$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P_{13}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**2. Multiplication :** $L_2 \leftarrow 2L_2$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D_2(2)} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**3. Addition :** $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$A' = T_{31}(-1)\, D_2(2)\, P_{13}\, A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

**Remarque 6: Opérations sur les lignes et les colonnes**

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\begin{array}{l} A' = PA, \quad P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \Longrightarrow \text{opérations sur les lignes,} \\ A' = AQ, \quad Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Longrightarrow \text{opérations sur les colonnes.} \end{array}}$$

En particulier,

$$\boxed{\mathrm{rg}(PAQ) = \mathrm{rg}(A).}$$

### 4.6.2 Calcul d'une inverse par réduction

**Théorème 4.6.1: Réduction de $[A \mid I_n]$**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\boxed{A \text{ inversible} \iff [A \mid I_n] \xrightarrow{\text{Gauss–Jordan}} [I_n \mid B].}$$

Dans ce cas,

$$\boxed{B = A^{-1}.}$$

*Démonstration.* $(\Rightarrow)$.

Supposons $A$ inversible. Alors

$$AX = 0 \Longrightarrow X = 0 \Longrightarrow \operatorname{rg}(A) = n.$$

Ainsi, la réduction de Gauss–Jordan donne

$$A \xrightarrow{\text{Gauss–Jordan}} I_n.$$

Soient $P_1, \ldots, P_r \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ les matrices des opérations élémentaires.

On obtient

$$P_r \cdots P_2 P_1 A = I_n.$$

Posons

$$P = P_r \cdots P_2 P_1.$$

Alors

$$PA = I_n \Longrightarrow P = A^{-1}.$$

En appliquant les mêmes opérations aux deux blocs, on obtient

$$\begin{aligned} [A \mid I_n] &\longrightarrow [P_1 A \mid P_1] \\ &\longrightarrow [P_2 P_1 A \mid P_2 P_1] \\ &\longrightarrow [PA \mid P] \\ &= [I_n \mid A^{-1}]. \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$.

Supposons

$$[A \mid I_n] \xrightarrow{\text{Gauss–Jordan}} [I_n \mid B].$$

Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$[PA \mid P] = [I_n \mid B].$$

Par identification,

$$\begin{cases} PA = I_n, \\ P = B. \end{cases}$$

D'où

$$BA = I_n.$$

Puisque $B$ est inversible,

$$BA = I_n \Longrightarrow A = B^{-1}.$$

Ainsi,

$$A \text{ inversible}, \qquad B = A^{-1}.$$

■

**Exemple 11: Calcul d'une inverse par Gauss–Jordan**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

On considère le tableau augmenté

$$[A \mid I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

**Étape 1 :** $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

**Étape 2 :** $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Ainsi,

$$[A \mid I_2] \longrightarrow [I_2 \mid B], \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.}$$

**Vérification :**

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

**Remarque 7: Critère pratique d'inversibilité**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par réduction de Gauss–Jordan,

$$[A \mid I_n] \longrightarrow [R \mid B].$$

Alors

$$\boxed{\begin{aligned} R = I_n &\iff \operatorname{rg}(A) = n \\ &\iff A \text{ inversible,} \end{aligned}}$$

et, dans ce cas,

$$\boxed{A^{-1} = B.}$$

En revanche,

$$\boxed{\operatorname{rg}(A) < n \iff A \text{ non inversible.}}$$

### 4.6.3 Calcul du rang

**Proposition 4.6.2: Invariance du rang par les opérations élémentaires**

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
Pour toutes matrices inversibles $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$,

$$\operatorname{rg}(PAQ) = \operatorname{rg}(A).$$

Ainsi, les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes conservent le rang.

*Démonstration.* Opérations sur les lignes. Soit $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} u_{PA} &= \{PAX : X \in \mathbb{K}^n\} \\ &= P(\operatorname{Im} u_A). \end{aligned}$$

Puisque $P$ est inversible,

$$\operatorname{Im} u_A \simeq P(\operatorname{Im} u_A).$$

D'où

$$\operatorname{rg}(PA) = \operatorname{rg}(A).$$

Opérations sur les colonnes. Soit $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} u_{AQ} &= \{AQX : X \in \mathbb{K}^n\} \\ &= \{AY : Y \in \mathbb{K}^n\} \\ &= \operatorname{Im} u_A, \end{aligned}$$

car $Q(\mathbb{K}^n) = \mathbb{K}^n$.

Ainsi,

$$\operatorname{rg}(AQ) = \operatorname{rg}(A).$$

Finalement,

$$\operatorname{rg}(PAQ) = \operatorname{rg}(A).$$

■

**Théorème 4.6.2: Rang et nombre de pivots**

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Si $R$ est une forme échelonnée de $A$, possédant $r$ pivots, alors

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = r.}$$

*Démonstration.* Soit $R = (r_{ij})$ une forme échelonnée de $A$, avec $r$ pivots situés aux colonnes

$$1 \leq p_1 < \cdots < p_r \leq n.$$

Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de $R$.

Montrons que $(C_{p_1}, \ldots, C_{p_r})$ est libre.

Supposons

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j C_{p_j} = 0.$$

La $r$-ième ligne donne

$$\lambda_r r_{r,p_r} = 0 \Longrightarrow \lambda_r = 0,$$

puisque $r_{r,p_r} \neq 0$.

Par remontée,

$$\lambda_{r-1} = \cdots = \lambda_1 = 0.$$

Ainsi,

$$\mathrm{rg}(R) \geq r.$$

Les $m - r$ dernières lignes de $R$ sont nulles. Par conséquent,

$$\mathrm{Im}\, u_R \subseteq \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r),$$

où $(e_1, \ldots, e_m)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^m$.

D'où

$$\mathrm{rg}(R) \leq r.$$

Ainsi,

$$\mathrm{rg}(R) = r.$$

Enfin, $R$ étant obtenue par opérations élémentaires sur les lignes,

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(R) = r.$$

■

**Proposition 4.6.3: Rang des lignes et de la transposée**

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,

$$\boxed{\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A).}$$

Ainsi, le rang des lignes est égal au rang des colonnes.

*Démonstration.* Soit $R$ une forme échelonnée de $A$, possédant $r$ lignes non nulles.
Notons $L_1, \ldots, L_m$ les lignes de $R$.
Les opérations élémentaires étant réversibles,

$$\text{Vect}(\text{lignes de } A) = \text{Vect}(\text{lignes de } R).$$

De plus,

$$\text{Vect}(L_1, \ldots, L_m) = \text{Vect}(L_1, \ldots, L_r).$$

Montrons que $(L_1, \ldots, L_r)$ est libre.
Si

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i L_i = 0,$$

la colonne du premier pivot donne

$$\lambda_1 r_{1,p_1} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0.$$

Successivement,

$$\lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0.$$

Donc

$$\dim \text{Vect}(L_1, \ldots, L_r) = r.$$

Les lignes de $A$ étant les colonnes de $A^T$,

$$\text{rg}(A^T) = r.$$

Or, d'après le théorème précédent,

$$\text{rg}(A) = r.$$

Finalement,

$$\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A).$$

■

**Exemple 12: Rang d'une matrice rectangulaire**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}).$$

Par opérations élémentaires,

$$A \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R.$$

Les pivots sont

$$r_{11} = 1, \qquad r_{23} = 1.$$

Ainsi,

$$\operatorname{rg}(A) = 2.$$

**Corollaire 4.6.1: Compatibilité et nombre de paramètres**

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$ et

$$(S) : \quad AX = b.$$

Alors

$$\boxed{(S) \text{ compatible} \iff \operatorname{rg}([A \mid b]) = \operatorname{rg}(A).}$$

Si $(S)$ est compatible et $\operatorname{rg}(A) = r$, alors ses solutions dépendent de

$$\boxed{n - r}$$

paramètres libres.

*Démonstration.* Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de $A$.

On a

$$\begin{aligned} AX = b \text{ compatible} &\iff \exists X \in \mathbb{K}^n : \ AX = b \\ &\iff b \in \operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_n) \\ &\iff \operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_n, b) = \operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_n) \\ &\iff \operatorname{rg}([A \mid b]) = \operatorname{rg}(A). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\operatorname{rg}(A) = r \Longrightarrow \begin{cases} r \text{ inconnues principales,} \\ n - r \text{ inconnues libres.} \end{cases}$$

Ainsi, les solutions sont déterminées par $n - r$ paramètres libres. ■

**Remarque 8: Rang et nombre de solutions**

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$ et

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathbb{K}^n : AX = b\}.$$

Posons

$$r = \operatorname{rg}(A), \qquad r' = \operatorname{rg}([A \mid b]).$$

Alors

$$r < r' \Longrightarrow \mathcal{S} = \varnothing,$$
$$r = r' = n \Longrightarrow |\mathcal{S}| = 1,$$
$$r = r' < n \Longrightarrow |\mathcal{S}| = \infty.$$

## 4.7 Matrice d'une application linéaire

**Définition 4.7.1: Matrice relative à deux bases**

Soient $u : E \to F$ linéaire, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$ une base de $F$. La matrice

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)$$

a pour $j$-ième colonne les coordonnées de $u(e_j)$ dans $\mathcal{C}$. Autrement dit,

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i.$$

On note $[x]_{\mathcal{B}}$ la colonne des coordonnées de $x$ dans $\mathcal{B}$.

**Théorème 4.7.1: Formule des coordonnées**

Pour tout $x \in E$,

$$\boxed{[u(x)]_{\mathcal{C}} = A[x]_{\mathcal{B}}.}$$

*Démonstration.* Si $x = \sum_j x_j e_j$, alors

$$u(x) = \sum_j x_j u(e_j) = \sum_j x_j \sum_i a_{ij} f_i = \sum_i \left( \sum_j a_{ij} x_j \right) f_i.$$

La $i$-ième coordonnée de $u(x)$ est donc $\sum_j a_{ij} x_j$, qui est la $i$-ième composante de $A[x]_{\mathcal{B}}$. ■

**Proposition 4.7.1: Somme, composition et rang**

La représentation matricielle est linéaire. Si $v : F \to G$ est linéaire et $\mathcal{D}$ une base de $G$, alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{B}}(v \circ u) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(v) \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u).$$

Enfin, $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(A)$.

*Démonstration.* Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$ une base de $F$.

Posons

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u).$$

Pour $u, w \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$(\lambda u + \mu w)(e_j) = \lambda u(e_j) + \mu w(e_j),$$
$$[(\lambda u + \mu w)(e_j)]_{\mathcal{C}} = \lambda [u(e_j)]_{\mathcal{C}} + \mu [w(e_j)]_{\mathcal{C}}.$$

D'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\lambda u + \mu w) = \lambda \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u) + \mu \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(w).$$

Soit maintenant $v \in \mathcal{L}(F,G)$ et $\mathcal{D}$ une base de $G$. Posons

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(v).$$

Pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}[(v \circ u)(x)]_{\mathcal{D}} &= [v(u(x))]_{\mathcal{D}} \\ &= B[u(x)]_{\mathcal{C}} \\ &= BA[x]_{\mathcal{B}}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{B}}(v \circ u) = BA.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\, u_A &= \{A[x]_{\mathcal{B}} : x \in E\} \\ &= \{[u(x)]_{\mathcal{C}} : x \in E\}.\end{aligned}$$

L'application de coordonnées

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathcal{C}} : F &\longrightarrow \mathbb{K}^m \\ y &\longmapsto [y]_{\mathcal{C}}\end{aligned}$$

est un isomorphisme, et

$$\varphi_{\mathcal{C}}(\mathrm{Im}\, u) = \mathrm{Im}\, u_A.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(u) &= \dim \mathrm{Im}\, u \\ &= \dim \mathrm{Im}\, u_A \\ &= \mathrm{rg}(A).\end{aligned}$$

■

**Exemple 13: Application entre deux espaces de coordonnées**

Pour $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $u(x,y,z) = (x+2y, y-z)$, on a

$$u(e_1) = (1,0), \quad u(e_2) = (2,1), \quad u(e_3) = (0,-1).$$

Dans les bases canoniques, la matrice est donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exemple 14: Matrice de la dérivation**

Pour $D : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_1[X]$, $D(P) = P'$, choisissons $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{C} = (1, X)$. Comme $D(1) = 0$, $D(X) = 1$, $D(X^2) = 2X$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le produit par $(a,b,c)^T$ donne $(b,2c)^T$, les coordonnées de $(a + bX + cX^2)'$.

## 4.8 Changement de base

**Définition 4.8.1: Matrice de passage**

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de $E$. On définit

$$P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \Big( [e'_1]_{\mathcal{B}} \ \cdots \ [e'_n]_{\mathcal{B}} \Big).$$

Ses colonnes sont les coordonnées des nouveaux vecteurs de base dans l'ancienne base.

**Proposition 4.8.1: Transformation des coordonnées**

La matrice $P = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ est inversible et

$$\boxed{[x]_{\mathcal{B}} = P[x]_{\mathcal{B}'}, \qquad [x]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[x]_{\mathcal{B}}.}$$

Son inverse est $P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$.

*Démonstration.* Si $x = \sum_j x'_j e'_j$, ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ s'obtiennent en additionnant $x'_j [e'_j]_{\mathcal{B}}$, ce qui donne la première formule. En échangeant les deux bases, on obtient $[x]_{\mathcal{B}'} = Q[x]_{\mathcal{B}}$ avec $Q = P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$. La composition des deux égalités donne $PQX = X$ et $QPY = Y$ pour toutes colonnes $X, Y$. Ainsi $PQ = QP = I_n$ et $Q = P^{-1}$. ■

**Remarque 9: Sens de la matrice de passage**

Pour $P = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$, les colonnes de $P$ sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ :

$$\boxed{\begin{aligned} [x]_{\mathcal{B}} &= P[x]_{\mathcal{B}'}, \\ [x]_{\mathcal{B}'} &= P^{-1}[x]_{\mathcal{B}}. \end{aligned}}$$

Le sens de la flèche indique la base dans laquelle les coordonnées sont obtenues.

**Exemple 15: Changement de coordonnées dans $\mathbb{R}^2$**

Pour la base canonique $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}' = ((1,1),(1,-1))$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P^2 = 2I_2, \qquad P^{-1} = \tfrac{1}{2}P.$$

Pour $x = (3,1)$, on obtient $[x]_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{2}P(3,1)^T = (2,1)^T$. On vérifie $x = 2(1,1) + (1,-1)$.

**Théorème 4.8.1: Changement de base pour un endomorphisme**

Soient $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ les matrices d'un endomorphisme $u : E \to E$. Alors

$$\boxed{A' = P^{-1}AP, \qquad P = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}.}$$

Deux matrices reliées par cette formule sont dites *semblables*.

*Démonstration.* Pour tout $x \in E$,

$$[u(x)]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[u(x)]_{\mathcal{B}} = P^{-1}A[x]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP[x]_{\mathcal{B}'}.$$

En prenant pour $x$ les vecteurs de $\mathcal{B}'$, on identifie les colonnes : $A' = P^{-1}AP$. ■

**Exemple 16: Matrice d'un même endomorphisme dans deux bases**

Pour $u(x, y) = (2x, y)$ et les bases de l'exemple précédent,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad AP = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$A' = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Sa première colonne signifie $u(1,1) = \frac{3}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1)$, ce qui redonne $(2,1)$.

**Remarque 10: Invariants de deux matrices semblables**

Soient $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que $A' = P^{-1}AP$. Alors

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{rg}(A') &= \mathrm{rg}(A), \\ \mathrm{tr}(A') &= \mathrm{tr}(A). \end{aligned}}$$

Ainsi, les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes ont le même rang et la même trace.

**Proposition 4.8.2: Changement de bases au départ et à l'arrivée**

Pour $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)$, si $P = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}'}$, alors

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(u) = Q^{-1}AP.}$$

*Démonstration.* On utilise successivement les coordonnées dans les deux espaces :

$$[u(x)]_{\mathcal{C}'} = Q^{-1}[u(x)]_{\mathcal{C}} = Q^{-1}A[x]_{\mathcal{B}} = Q^{-1}AP[x]_{\mathcal{B}'}.$$

L'identification des colonnes donne la formule. ■

# Bibliographie

[1] **Collectif Exo7, cours d'algèbre.**
Cours de première année, complément pour l'algèbre linéaire ; site Exo7 : https://exo7.emath.fr/.

[2] **Daniel Perrin, Cours d'algèbre.**
Ouvrage de référence (Ellipses), lecture d'approfondissement.