UNIVERSITÉ MOHAMMED V

FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT

Département de Mathématiques

FORMATION UNIVERSITAIRE

Licence – Sciences Mathématiques

Algèbre III

CHAPITRE 5

Déterminants et Cramer

Développements, inverses, systèmes et déterminants de Gram

SUPPORT DE COURS

Prof. Mohamed Najib LAATABI

najib.laatabi@um5r.ac.ma

mohamednajiblaatabi.com

Toute remarque ou suggestion est la bienvenue. Si vous constatez une erreur dans ce document, merci de bien vouloir la signaler.

Année universitaire • **2026–2027**

Table des matières

Notations **ii**

5 Déterminants et Cramer **1**

5.1 Déterminant : définition et premières formules 1

5.2 Multilinéarité, alternance et propriétés fondamentales 3

5.3 Mineurs, cofacteurs et développement de Laplace 7

5.4 Produit de déterminants et inversibilité 8

5.5 Comatrice et calcul d'une inverse 10

5.6 Déterminant d'une famille de vecteurs et d'un endomorphisme 12

5.7 Mineurs et rang d'une matrice 14

5.8 Règle de Cramer et systèmes linéaires 15

Bibliographie **19**

Notations

Déterminants et cofacteurs

Notation	Signification
$\mathfrak{S}_n$	Ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$.
$\sigma \in \mathfrak{S}_n$	Permutation de $\{1, \ldots, n\}$.
$\mathrm{Inv}(\sigma)$	Ensemble des inversions de σ.
$N(\sigma)$	Nombre d'inversions de σ.
$\mathrm{sgn}(\sigma)$	Signature de σ, égale à $(-1)^{N(\sigma)}$.
$\det A$ ou $\lvert A \rvert$	Déterminant de la matrice carrée A.
C_j	j-ième colonne de la matrice A (hors contexte de cofacteurs).
$A^{(i,j)}$	Matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j.
M_{ij}	Mineur associé à a_{ij} : $\det A^{(i,j)}$.
C_{ij}	Cofacteur associé à a_{ij} : $(-1)^{i+j} M_{ij}$.
$\mathrm{Com}(A)$	Comatrice : matrice des cofacteurs (C_{ij}).
$\mathrm{adj}(A)$	Adjointe classique : $\mathrm{Com}(A)^T$.
$\Delta_{I,J}$	Mineur obtenu en sélectionnant les lignes I et les colonnes J.

Inversibilité, dimension et règle de Cramer

Notation	Signification
$L_i \leftrightarrow L_j$	Échange de deux lignes, changeant le signe du déterminant.
$L_i \leftarrow \lambda L_i$	Multiplication d'une ligne par λ, multipliant le déterminant par λ.
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	Addition d'un multiple d'une autre ligne ; déterminant inchangé $(i \neq j)$.
$\mathcal{B}$	Base de référence d'un espace vectoriel de dimension finie.
$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$	Déterminant des coordonnées de la famille dans $\mathcal{B}$.
$\det u$	Déterminant de l'endomorphisme u.
$P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$	Matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$.
$AX = b$	Écriture matricielle d'un système linéaire.
$[A \mid b]$	Matrice augmentée du système $AX = b$.
$A_j(b)$	Matrice A dont la j-ième colonne est remplacée par b.
Δ	Déterminant principal $\det A$ d'un système de Cramer.
Δ_j	Déterminant $\det A_j(b)$; $x_j = \Delta_j / \Delta$.
$\mathcal{S}(S)$	Ensemble des solutions du système (S).

Chapitre 5

Déterminants et Cramer

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. À une matrice carrée, on associe un scalaire, son déterminant. On établit les règles de calcul, puis les critères d'inversibilité, le calcul de l'inverse, le rang par les mineurs et la règle de Cramer.

5.1 Déterminant : définition et premières formules

5.1.1 Permutations et signatures

Définition 5.1.1: Permutation, inversion et signature

Soit $n \geq 1$. Une *permutation* est une bijection

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}.$$

L'ensemble des permutations est noté $\mathfrak{S}_n$. On pose

$$\begin{aligned} \mathrm{Inv}(\sigma) &= \{(i,j) : 1 \leq i < j \leq n,\ \sigma(i) > \sigma(j)\}, \\ N(\sigma) &= \mathrm{card}\Big(\mathrm{Inv}(\sigma)\Big), \\ \mathrm{sgn}(\sigma) &= (-1)^{N(\sigma)} \in \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

Ainsi, σ est *paire* si $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ et *impaire* sinon. Une *transposition* échange deux éléments et fixe tous les autres.

Exemple 1: Calcul d'une signature

Pour $\sigma = (2, 3, 1)$ et $\tau = (2, 1, 3)$, écrites par leurs images successives,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Inv}(\sigma) = \{(1,3), (2,3)\}, \quad N(\sigma) = 2, \quad \mathrm{sgn}(\sigma) = 1, \\ &\mathrm{Inv}(\tau) = \{(1,2)\}, \qquad\quad N(\tau) = 1, \quad \mathrm{sgn}(\tau) = -1. \end{aligned}$$

Lemme 5.1.1: Propriétés de la signature

Pour $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$,

$$\mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau), \qquad \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma).$$

Pour toute transposition t,

$$\mathrm{sgn}(t) = -1.$$

Démonstration. Un échange de deux termes voisins modifie $N(\sigma)$ de ± 1, donc change la signature. Toute permutation se décompose en échanges voisins, d'où

$$\sigma = t_1 \circ \cdots \circ t_k \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k.$$

En appliquant les mêmes échanges à une liste permutée,

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau).$$

En outre,

$$1 = \operatorname{sgn}(\mathrm{id}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \Longrightarrow \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

L'échange des positions $i < j$ nécessite $2(j-i)-1$ échanges voisins : ce nombre étant impair, sa signature vaut -1. ■

5.1.2 Définition du déterminant

Définition 5.1.2: Déterminant d'une matrice carrée

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Le *déterminant* de A est le scalaire

$$\boxed{\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.}$$

Chaque produit contient exactement un coefficient de chaque ligne et de chaque colonne. On utilise également la notation

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Pour $n = 1$, $\det(a) = a$; par convention, $\det(\text{matrice vide}) = 1$.

Remarque 1: Matrice et déterminant

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \det A \in \mathbb{K}.$$

La notation $\det A$ ne s'applique pas à une matrice rectangulaire.

Proposition 5.1.1: Déterminants d'ordre deux et trois

On a

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.}$$

Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Démonstration. Pour $n = 2$, $\mathfrak{S}_2 = \{(1,2),(2,1)\}$:

$$\det A = (+1)ad + (-1)bc = ad - bc.$$

Pour $n = 3$, les trois permutations paires donnent $aei + bfg + cdh$; les trois impaires donnent $-ceg - bdi - afh$. ■

Exemple 2: Calculs directs

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - 3 = -7.$$

De même,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det A = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 7.$$

Remarque 2: Règle de Sarrus

La formule à six termes correspond à la règle de Sarrus, valable uniquement pour les déterminants d'ordre 3 (et non pour $n \geq 4$).

5.2 Multilinéarité, alternance et propriétés fondamentales

5.2.1 Caractérisation du déterminant

Définition 5.2.1: Multilinéarité et alternance

Soit $D : (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}$. L'application D est *multilinéaire* si, pour toute position j,

$$\begin{aligned} &D(C_1, \ldots, \lambda U + \mu V, \ldots, C_n) \\ &\quad = \lambda D(C_1, \ldots, U, \ldots, C_n) + \mu D(C_1, \ldots, V, \ldots, C_n). \end{aligned}$$

Elle est *alternée* si

$$C_i = C_j,\ i \neq j \quad \Longrightarrow \quad D(C_1, \ldots, C_n) = 0.$$

Théorème 5.2.1: Caractérisation du déterminant

Le déterminant est l'unique application multilinéaire alternée D sur $(\mathbb{K}^n)^n$ telle que

$$D(e_1, \dots, e_n) = 1,$$

où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Plus généralement, pour $A = (C_1 \ \cdots \ C_n)$,

$$D(C_1, \dots, C_n) = D(e_1, \dots, e_n) \det A.$$

Démonstration. Dans la formule du déterminant, chaque terme est linéaire en une colonne fixée, d'où la multilinéarité. Une permutation de deux colonnes change le signe de chaque terme :

$$\det(\dots, C_i, \dots, C_j, \dots) = -\det(\dots, C_j, \dots, C_i, \dots).$$

Donc, si $C_i = C_j$, $\det A = -\det A$, d'où $\det A = 0$ sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Enfin,

$$\det I_n = 1.$$

Pour l'unicité, écrivons $C_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$. Par multilinéarité,

$$D(C_1, \dots, C_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n = 1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{n} a_{i_j, j} \right) D(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}).$$

L'alternance annule les termes où deux indices coïncident. Les autres indices forment une permutation $\tau \in \mathfrak{S}_n$, donc

$$\begin{aligned} D(C_1, \dots, C_n) &= D(e_1, \dots, e_n) \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{j=1}^{n} a_{\tau(j), j} \\ &= D(e_1, \dots, e_n) \det A, \end{aligned}$$

par le changement d'indice $\sigma = \tau^{-1}$. ■

Proposition 5.2.1: Déterminant et transposition

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\det(A^T) = \det A.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \det(A^T) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i), i} \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{j=1}^{n} a_{j, \tau(j)} = \det A, \end{aligned}$$

avec $\tau = \sigma^{-1}$. ■

5.2.2 Opérations élémentaires

Corollaire 5.2.1: Effet des opérations sur le déterminant

Soit $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue à partir de A par une opération élémentaire sur les lignes. Alors, pour $i \neq j$,

$$\begin{aligned} L_i \leftrightarrow L_j &\implies \det A' = -\det A, \\ L_i \leftarrow \lambda L_i &\implies \det A' = \lambda \det A, \\ L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j &\implies \det A' = \det A. \end{aligned}$$

Les mêmes règles valent pour les colonnes. En particulier,

$$\left.\begin{array}{r} \text{une ligne ou colonne nulle, ou} \\ \text{deux lignes ou colonnes proportionnelles} \end{array}\right\} \implies \det A = 0.$$

Démonstration. Par multilinéarité et alternance, pour $i \neq j$,

$$\begin{aligned} &\det(\ldots, C_i + \lambda C_j, \ldots, C_j, \ldots) \\ &\quad = \det(\ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots) + \lambda \underbrace{\det(\ldots, C_j, \ldots, C_j, \ldots)}_{=0}. \end{aligned}$$

L'échange de deux colonnes change le signe ; l'extraction d'un scalaire découle de la linéarité dans une colonne. Pour les lignes, appliquer $\det(A^T) = \det A$. ■

Proposition 5.2.2: Scalaire et matrice triangulaire

Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$$

Si A est diagonale ou triangulaire, alors

$$\boxed{\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.}$$

Démonstration. La multilinéarité appliquée aux n colonnes donne

$$\det(\lambda C_1, \ldots, \lambda C_n) = \lambda^n \det(C_1, \ldots, C_n).$$

Si A est triangulaire supérieure, un terme non nul impose $\sigma(i) \geq i$ pour tout i. Or

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) = \sum_{i=1}^{n} i \quad \implies \quad \sigma(i) = i \ \ (1 \leq i \leq n).$$

Seul le produit diagonal subsiste. Le cas triangulaire inférieur résulte de la transposition. ■

Exemple 3: Calcul par triangularisation

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En utilisant des additions de multiples de lignes,

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} && (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} && (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3. \end{aligned}$$

Exemple 4: Effet d'un échange de lignes

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} \det B &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} && (L_1 \leftrightarrow L_2) \\ &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} && (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \\ &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -13/2 \end{vmatrix} && (L_3 \leftarrow L_3 - \tfrac{1}{2}L_2) \\ &= -1 \cdot 2 \cdot (-13/2) = 13. \end{aligned}$$

Remarque 3: Attention aux opérations

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B \quad \text{en général.}$$

Par exemple, $\det(2I_2) = 4 \neq 2 = \det I_2 + \det I_2$.

5.3 Mineurs, cofacteurs et développement de Laplace

Définition 5.3.1: Mineur et cofacteur

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 1$. On note $A^{(i,j)}$ la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A. Le *mineur* et le *cofacteur* associés à a_{ij} sont

$$\boxed{M_{ij} = \det A^{(i,j)}, \qquad C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.}$$

Pour $n = 1$, on pose $M_{11} = C_{11} = 1$.

Exemple 5: Mineurs et signes des cofacteurs

Pour $n = 3$, les signes des cofacteurs sont

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad C_{12} = (-1)^3(-2) = 2,$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad C_{23} = (-1)^5(-4) = 4.$$

Théorème 5.3.1: Développement de Laplace

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour toute ligne i et toute colonne j,

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} C_{kj}.}$$

La première somme est un développement selon la ligne i ; la seconde selon la colonne j.

Démonstration. Fixons la ligne i. Par linéarité en cette ligne,

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \det A_{i,k},$$

où $A_{i,k}$ est obtenue en remplaçant la ligne i par la ligne dont le seul coefficient non nul vaut 1 en position k. Par $i-1$ échanges de lignes et $k-1$ échanges de colonnes,

$$\det A_{i,k} = (-1)^{i+k-2} \det A^{(i,k)} = (-1)^{i+k} M_{ik} = C_{ik}.$$

Donc

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik}.$$

La formule selon la colonne j découle de $\det(A^T) = \det A$. ■

Exemple 6: Développement selon une colonne

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, la deuxième colonne donne

$$\begin{aligned} \det A &= 0 \cdot C_{12} + 1 \cdot C_{22} + 0 \cdot C_{32} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2. \end{aligned}$$

Exemple 7: Déterminant d'ordre quatre

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

En développant selon la deuxième ligne, puis selon la dernière ligne du mineur,

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6. \end{aligned}$$

5.4 Produit de déterminants et inversibilité

Théorème 5.4.1: Formule de Binet

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\boxed{\det(AB) = \det A \det B.}$$

Démonstration. Soient $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de B. L'application

$$D(C_1, \ldots, C_n) = \det(AC_1, \ldots, AC_n)$$

est multilinéaire et alternée, car $X \mapsto AX$ est linéaire. D'après la caractérisation du déter-

minant,

$$\begin{aligned} D(C_1,\dots,C_n) &= D(e_1,\dots,e_n)\det B \\ &= \det(AI_n)\det B \\ &= \det A \det B. \end{aligned}$$

Or $D(C_1,\dots,C_n) = \det(AB)$. ■

Théorème 5.4.2: Critère d'inversibilité par le déterminant

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\boxed{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0 \iff \mathrm{rg}(A) = n.}$$

Démonstration. Si A est inversible,

$$1 = \det I_n = \det(AA^{-1}) = \det A \det(A^{-1}),$$

d'où $\det A \neq 0$.

Réciproquement, si A n'est pas inversible, ses colonnes $(C_1,\dots,C_n)$ sont liées. Il existe j tel que

$$C_j = \sum_{k\neq j} \lambda_k C_k.$$

Par multilinéarité et alternance,

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{k\neq j} \lambda_k \det(C_1,\dots,C_{j-1},C_k,C_{j+1},\dots,C_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\det A \neq 0 \Longrightarrow A$ inversible. L'équivalence avec $\mathrm{rg}(A) = n$ résulte du chapitre 4. ■

Corollaire 5.4.1: Inverse, puissances et matrices semblables

Pour $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}, \qquad \det(A^p) = (\det A)^p.$$

Si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $A' = P^{-1}AP$, alors

$$\det A' = \det A.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} 1 = \det I_n &= \det A \det(A^{-1}), \\ \det(A^{p+1}) &= \det(A^p)\det A, \qquad \det(A^0) = 1, \\ \det(P^{-1}AP) &= (\det P)^{-1}\det A \det P = \det A. \end{aligned}$$

■

Exemple 8: Inversibilité et paramètre

Soit $A_a = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\det A_a = a^2 - 1 = (a-1)(a+1),$$

d'où

$$A_a \text{ inversible} \iff a \notin \{-1, 1\}.$$

5.5 Comatrice et calcul d'une inverse

Définition 5.5.1: Comatrice et adjointe classique

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les cofacteurs $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ forment la *comatrice*

$$\mathrm{Com}(A) = (C_{ij})_{1 \le i,j \le n}.$$

Son transposé est l'*adjointe classique* :

$$\mathrm{adj}(A) = \mathrm{Com}(A)^T.$$

Théorème 5.5.1: Identité de la comatrice et formule de l'inverse

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\boxed{A\,\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)A = (\det A) I_n.}$$

Si $\det A \neq 0$, alors

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{Com}(A)^T.}$$

Démonstration. Le coefficient de position (i,j) de $A\,\mathrm{adj}(A)$ vaut

$$(A\,\mathrm{adj}(A))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{jk}.$$

Pour $i = j$, le développement selon la ligne i donne $\sum_k a_{ik} C_{ik} = \det A$. Si $i \neq j$, cette somme est le développement suivant la ligne j du déterminant obtenu en y copiant la ligne i ; deux lignes sont alors égales, donc la somme vaut 0. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{jk} = \begin{cases} \det A, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

d'où $A\,\mathrm{adj}(A) = (\det A) I_n$. Par le même raisonnement sur les colonnes,

$$(\mathrm{adj}(A)A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} C_{ki} a_{kj} = \begin{cases} \det A, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Si $\det A \neq 0$, on divise les deux identités par $\det A$ et on obtient l'inverse de A. ■

Exemple 9: Inverse d'une matrice d'ordre deux

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Si $ad - bc \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

En particulier,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 10: Comatrice et inverse d'ordre trois

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det A = 7.$$

Le calcul des neuf cofacteurs donne

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Par exemple,

$$C_{13} = (+1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6,$$

$$C_{23} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4.$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

On vérifie $A\,\mathrm{adj}(A) = 7I_3$.

Remarque 4: Attention à la transposition

$$\mathrm{adj}(A) = \mathrm{Com}(A)^T, \qquad A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{\det A}.$$

La comatrice doit donc être transposée dans la formule de l'inverse. Pour les matrices de grande taille, Gauss–Jordan peut être plus économique.

5.6 Déterminant d'une famille de vecteurs et d'un endomorphisme

5.6.1 Déterminant d'une famille

Définition 5.6.1: Déterminant relatif à une base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour $u_1, \dots, u_n \in E$, on pose

$$\boxed{\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det\Big([u_1]_{\mathcal{B}} \ \cdots \ [u_n]_{\mathcal{B}}\Big).}$$

Proposition 5.6.1: Critère de base par le déterminant

Soient $\dim E = n$ et $u_1, \dots, u_n \in E$. Alors

$$(u_1, \dots, u_n) \text{ base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0.$$

Démonstration. Notons $M = ([u_1]_{\mathcal{B}} \ \cdots \ [u_n]_{\mathcal{B}})$. L'application de coordonnées étant un isomorphisme,

$$\begin{aligned}(u_1, \dots, u_n) \text{ base de } E &\iff (\text{colonnes de } M) \text{ base de } \mathbb{K}^n \\ &\iff \operatorname{rg}(M) = n \\ &\iff \det M \neq 0.\end{aligned}$$

■

Exemple 11: Une base de $\mathbb{R}^3$

Soient $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (1, 0, 1)$. Dans la base canonique $\mathcal{B}$,

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \neq 0.\end{aligned}$$

Ainsi, (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 5.6.2: Changement de base et déterminant d'une famille

Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $P = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$. Alors

$$\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n) = \frac{\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)}{\det P}.$$

Démonstration. Posons $M_{\mathcal{B}} = ([u_1]_{\mathcal{B}} \ \cdots \ [u_n]_{\mathcal{B}})$. D'après le chapitre 4,

$$M_{\mathcal{B}} = P M_{\mathcal{B}'} \Longrightarrow \det M_{\mathcal{B}} = \det P \det M_{\mathcal{B}'}.$$

Or P est inversible, donc $\det P \neq 0$ et la formule en découle. ■

Remarque 5: Dépendance à la base

La valeur de $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$ dépend de la base choisie, mais sa nullité n'en dépend pas :

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) = 0 \iff \det_{\mathcal{B}'}(u_1, \ldots, u_n) = 0.$$

5.6.2 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 5.6.3: Indépendance de la matrice d'un endomorphisme

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n < +\infty$, les matrices de u dans deux bases quelconques ont le même déterminant.

Démonstration. Pour $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$,

$$A' = P^{-1}AP, \quad P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Ainsi,

$$\det A' = \det(P^{-1}) \det A \det P = \det A.$$

■

Définition 5.6.2: Déterminant d'un endomorphisme

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n < +\infty$, on définit

$$\det u = \det\Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\Big),$$

indépendamment de la base $\mathcal{B}$.

Corollaire 5.6.1: Composition et automorphisme

Pour $u, v \in \mathcal{L}(E)$, avec $\dim E < +\infty$,

$$\det(v \circ u) = \det v \det u, \qquad u \text{ bijectif} \iff \det u \neq 0.$$

Démonstration. Dans une même base $\mathcal{B}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u).$$

La formule de Binet donne le premier résultat. Le critère d'inversibilité de la matrice donne le second. ■

5.7 Mineurs et rang d'une matrice

Définition 5.7.1: Mineur d'ordre r

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $1 \leq r \leq \min(m,n)$. Pour

$$1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m, \qquad 1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n,$$

on appelle *mineur d'ordre r* le déterminant

$$\Delta_{I,J} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & \cdots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix}, \quad I = (i_1, \ldots, i_r),\ J = (j_1, \ldots, j_r).$$

Théorème 5.7.1: Caractérisation du rang par les mineurs

Pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ non nulle,

$$\boxed{\operatorname{rg}(A) = \max\{r \geq 1 : \exists \text{ un mineur d'ordre } r \text{ non nul}\}.}$$

Si $A = 0_{m,n}$, $\operatorname{rg}(A) = 0$.

Démonstration. Soit $\Delta_{I,J} \neq 0$ un mineur d'ordre r. Les r colonnes de la sous-matrice carrée correspondante sont libres. Toute relation entre les r colonnes complètes de A, restreinte aux lignes I, impose donc des coefficients nuls. Ainsi,

$$\Delta_{I,J} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rg}(A) \geq r.$$

Réciproquement, soit $s = \operatorname{rg}(A) > 0$. On extrait s colonnes libres de A, formant $B \in \mathcal{M}_{m,s}(\mathbb{K})$, de rang s. L'égalité des rangs des lignes et des colonnes donne

$$\operatorname{rg}(B^T) = \operatorname{rg}(B) = s.$$

On extrait donc s lignes libres parmi les lignes de B. Leur matrice carrée $M \in \mathcal{M}_s(\mathbb{K})$ est de rang s, d'où

$$\det M \neq 0.$$

C'est un mineur d'ordre s de A. Les deux implications donnent le résultat. ■

Exemple 12: Rang d'une matrice rectangulaire

Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}),$$

le mineur des colonnes 1 et 3 vaut

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0.$$

Donc $\operatorname{rg}(A) \geq 2$ et, puisque $\operatorname{rg}(A) \leq 2$,

$$\operatorname{rg}(A) = 2.$$

Exemple 13: Déterminant nul et rang non nul

Pour

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad L_3 = L_1 + L_2,$$

on a

$$\det B = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rg}(B) = 2.$$

5.8 Règle de Cramer et systèmes linéaires

5.8.1 Formule de Cramer

Définition 5.8.1: Système de Cramer

Un système $AX = b$ est dit *de Cramer* si

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0.$$

Si $A = (C_1 \ \cdots \ C_n)$, on définit

$$A_j(b) = (C_1 \ \cdots \ C_{j-1} \ b \ C_{j+1} \ \cdots \ C_n), \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Théorème 5.8.1: Règle de Cramer

Pour tout système de Cramer $AX = b$, il existe une unique solution

$$X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

avec

$$\boxed{x_j = \frac{\det A_j(b)}{\det A}, \qquad 1 \leq j \leq n.}$$

Démonstration. Comme $\det A \neq 0$, la matrice A est inversible, donc $AX = b$ possède une solution unique. Écrivons

$$b = AX = \sum_{k=1}^{n} x_k C_k.$$

Par multilinéarité dans la j-ième colonne,

$$\begin{aligned} \det A_j(b) &= \sum_{k=1}^{n} x_k \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, C_k, C_{j+1}, \ldots, C_n) \\ &= x_j \det A, \end{aligned}$$

car les termes $k \neq j$ contiennent deux colonnes égales. Puisque $\det A \neq 0$,

$$x_j = \frac{\det A_j(b)}{\det A}.$$

■

Exemple 14: Système de Cramer dans $\mathbb{R}^2$

Résolvons

$$(S): \quad \begin{cases} 2x + y = 5, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

On obtient

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Ainsi,

$$(x, y) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) = (2, 1), \qquad \mathcal{S}(S) = \{(2, 1)\}.$$

Exemple 15: Système de Cramer dans $\mathbb{R}^3$

Soit

$$(S): \quad \begin{cases} x + y + z = 3, \\ x - y + z = 1, \\ x + y - z = 1. \end{cases}$$

Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on a, par $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$,

$$\Delta = \det A = 1 \cdot (-2) \cdot (-2) = 4.$$

Les déterminants de remplacement valent

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Donc

$$(x, y, z) = \left(\frac{4}{4}, \frac{4}{4}, \frac{4}{4}\right) = (1, 1, 1), \qquad \mathcal{S}(S) = \{(1, 1, 1)\}.$$

5.8.2 Discussion des valeurs exceptionnelles

Exemple 16: Discussion d'un système avec paramètre

Pour $a \in \mathbb{R}$, considérons

$$(S_a) : \quad \begin{cases} ax + y = 1, \\ x + ay = 1. \end{cases}$$

On pose

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \qquad \Delta(a) = a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1).$$

Si $a \notin \{-1, 1\}$, la règle de Cramer donne

$$\Delta_x = \Delta_y = a - 1, \qquad x = y = \frac{a - 1}{a^2 - 1} = \frac{1}{a + 1}.$$

Pour les valeurs exceptionnelles,

$$a = 1 : \quad x + y = 1 \quad \Longrightarrow \quad (x, y) = (1 - t, t),\ t \in \mathbb{R},$$

$$a = -1 : \quad \begin{cases} -x + y = 1, \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 0 = 2.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\mathcal{S}(S_a) = \begin{cases} \left\{\left(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1}\right)\right\}, & a \notin \{-1, 1\}, \\ \{(1 - t, t) : t \in \mathbb{R}\}, & a = 1, \\ \varnothing, & a = -1. \end{cases}}$$

Remarque 6: Limite de la règle de Cramer

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\det A \neq 0 \Longrightarrow \forall b \in \mathbb{K}^n,\ \exists! X \in \mathbb{K}^n :\ AX = b,$$
$$\det A = 0 \Longrightarrow \text{la règle de Cramer ne s'applique pas.}$$

Lorsque $\det A = 0$, on revient au critère du chapitre 4 :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}([A \mid b]) > \operatorname{rg}(A) &\Longrightarrow \mathcal{S} = \varnothing, \\ \operatorname{rg}([A \mid b]) = \operatorname{rg}(A) < n &\Longrightarrow |\mathcal{S}| = \infty. \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] **Collectif Exo7, cours d'algèbre.**
Cours de première année, complément pour l'algèbre linéaire ; site Exo7 : https://exo7.emath.fr/.

[2] **Daniel Perrin, Cours d'algèbre.**
Ouvrage de référence (Ellipses), lecture d'approfondissement.