1 SÉRIE DE TRAVAUX DIRIGÉS
Systèmes linéaires et méthode du pivot

Énoncés des exercices 6 exercices

Consigne. Justifier chaque réponse et détailler les calculs. Utiliser uniquement les opérations sur les équations et la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 1 : Pivot de Gauss et échange d'équations

On considère le système

$$(S) : \begin{cases} y + z = 1, \\ x - y + 2z = -3, \\ 2x + y - z = 5. \end{cases}$$

1) Réordonner les équations pour choisir un premier pivot non nul en x.

2) Échelonner le système en indiquant les opérations effectuées et les pivots.

3) Résoudre par substitution remontante et vérifier la solution dans (S).

Exercice 2 : Inconnues libres et système réduit

Résoudre le système

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 1, \\ 2x + 4y + z + 5t = 5, \\ x + 2y + 2z + 4t = 4. \end{cases}$$

1) Échelonner le système par des opérations sur les équations, puis le simplifier.

2) Préciser les inconnues principales, les inconnues libres et le nombre de paramètres.

3) Résoudre le système, donner une solution particulière et décrire toutes les solutions à partir de celle-ci.

Exercice 3 : Compatibilité selon le second membre

Pour $b \in \mathbb{R}$, étudier le système

$$(S_b) : \begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x + 3y + z = 5, \\ 3x + 4y + 2z = b. \end{cases}$$

1) Déterminer les valeurs de b pour lesquelles le système est compatible.

2) Dans le cas compatible, donner toutes les solutions.

3) Expliquer pourquoi l'ajout d'une équation peut rendre un système incompatible.

Exercice 4 : Système homogène à cinq inconnues

On considère

$$(H) : \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

1) Échelonner (H) et préciser le nombre de paramètres libres.

2) Décrire toutes les solutions et donner une solution non nulle.

3) Montrer directement que somme de deux solutions et multiplication d'une solution par un réel est encore solution.

Exercice 5 : Discussion complète en fonction d'un paramètre

Pour $a \in \mathbb{R}$, résoudre

$$(S_a) : \quad \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + ay + z = a, \\ x + y + a^2 z = a. \end{cases}$$

1) Effectuer des opérations élémentaires pour obtenir un système équivalent échelonné.

2) Discuter, selon a, les cas de solution unique, d'infinité de solutions et d'absence de solution.

3) Déterminer explicitement l'ensemble des solutions dans chaque cas.

Indication : ne jamais diviser par une expression en a avant d'avoir étudié ses zéros.

Exercice 6 : Application : interpolation polynomiale

On cherche $P(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ tel que

$$P(-1) = 2, \qquad P(1) = 0, \qquad P(2) = 3.$$

1) Traduire les trois conditions en un système linéaire.

2) Résoudre ce système par élimination et donner P.

3) Vérifier les valeurs imposées et expliquer l'unicité obtenue par le pivot.