1 SÉRIE DE TRAVAUX DIRIGÉS
Systèmes linéaires et méthode du pivot

Énoncés et corrigés détaillés — 6 exercices

Consigne. Justifier chaque réponse et détailler les calculs. Utiliser uniquement les opérations sur les équations et la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 1 : Pivot de Gauss et échange d'équations

On considère le système

$$(S):\quad \begin{cases} y+z=1,\\ x-y+2z=-3,\\ 2x+y-z=5. \end{cases}$$

1) Réordonner les équations pour choisir un premier pivot non nul en x.

2) Échelonner le système en indiquant les opérations effectuées et les pivots.

3) Résoudre par substitution remontante et vérifier la solution dans (S).

Corrigé de l'exercice 1

1) On échange les deux premières équations : $L_1 \leftrightarrow L_2$. On obtient

$$(S)\sim \begin{cases} x-y+2z=-3,\\ y+z=1,\\ 2x+y-z=5. \end{cases}$$

Le coefficient de x dans la première équation vaut 1 : c'est le premier pivot.

2) On élimine x dans la troisième équation, puis y :

$$L_3 \longleftarrow L_3-2L_1,$$
$$L_3 \longleftarrow L_3-3L_2.$$

Les systèmes successifs sont

$$\begin{cases} x-y+2z=-3,\\ y+z=1,\\ 3y-5z=11 \end{cases} \sim \begin{cases} x-y+2z=-3,\\ y+z=1,\\ -8z=8. \end{cases}$$

On a donc un système échelonné, avec trois pivots : $1,\ 1,\ -8$.

3) La remontée donne successivement

$$-8z=8 \implies z=-1,$$
$$y+z=1 \implies y=1-z=2,$$
$$x-y+2z=-3 \implies x=-3+y-2z=1.$$

Ainsi, $\mathcal{S}=\{(1,2,-1)\}$. Les trois égalités du système initial sont vérifiées :

$$2+(-1)=1,\qquad 1-2+2(-1)=-3,\qquad 2(1)+2-(-1)=5.$$

Exercice 2 : Inconnues libres et système réduit

Résoudre le système

$$\begin{cases} x+2y-z+t=1,\\ 2x+4y+z+5t=5,\\ x+2y+2z+4t=4. \end{cases}$$

1) Échelonner le système par des opérations sur les équations, puis le simplifier.

2) Préciser les inconnues principales, les inconnues libres et le nombre de paramètres.

3) Résoudre le système, donner une solution particulière et décrire toutes les solutions à partir de celle-ci.

Corrigé de l'exercice 2

1) On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\begin{cases} x+2y-z+t=1,\\ 3z+3t=3,\\ 3z+3t=3. \end{cases}$$

En remplaçant L_3 par $L_3 - L_2$, puis en divisant la deuxième équation par 3, on obtient

$$\begin{cases} x+2y-z+t=1,\\ z+t=1,\\ 0=0. \end{cases}$$

Enfin, l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ fournit le système équivalent simplifié

$$\begin{cases} x+2y+2t=2,\\ z+t=1. \end{cases}$$

2) Les inconnues principales sont x et z, tandis que y et t sont libres. Il y a quatre inconnues et deux équations indépendantes, donc

$$4-2=2 \text{ paramètres libres.}$$

3) Posons $y=s$ et $t=u$, où $(s,u)\in\mathbb{R}^2$. On obtient

$$\begin{cases} x=2-2s-2u,\\ z=1-u. \end{cases}$$

Par suite,

$$\mathcal{S}=\{(2-2s-2u,s,1-u,u) : (s,u)\in\mathbb{R}^2\}.$$

La valeur $s=u=0$ donne la solution particulière $X_0=(2,0,1,0)$. Toutes les solutions s'écrivent alors, sans autre notation,

$$(x,y,z,t)=(2,0,1,0)+s(-2,1,0,0)+u(-2,0,-1,1).$$

Exercice 3 : Compatibilité selon le second membre

Pour $b \in \mathbb{R}$, étudier le système

$$(S_b) : \begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x + 3y + z = 5, \\ 3x + 4y + 2z = b. \end{cases}$$

1) Déterminer les valeurs de b pour lesquelles le système est compatible.

2) Dans le cas compatible, donner toutes les solutions.

3) Expliquer pourquoi l'ajout d'une équation peut rendre un système incompatible.

Corrigé de l'exercice 3

1) On applique $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2$:

$$(S_b) \sim \begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x + 3y + z = 5, \\ 0 = b - 7. \end{cases}$$

La dernière équation n'est possible que si $b - 7 = 0$. Ainsi,

$$(S_b) \text{ est compatible } \iff b = 7.$$

2) Pour $b = 7$, la troisième équation est une conséquence des deux premières. En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, on obtient

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ y - z = 1. \end{cases}$$

Avec $z = t \in \mathbb{R}$, on trouve $y = 1 + t$ et $x = 2 - y - z = 1 - 2t$. D'où

$$\mathcal{S}_7 = \{(1 - 2t, 1 + t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

3) En additionnant les deux premières équations, on doit avoir

$$3x + 4y + 2z = 2 + 5 = 7.$$

Si la troisième impose en même temps $3x+4y+2z = b$ avec $b \neq 7$, les deux égalités sont contradictoires :

$$b \neq 7 \implies \mathcal{S}_b = \varnothing.$$

Exercice 4 : Système homogène à cinq inconnues

On considère

$$(H) : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

1) Échelonner (H) et préciser le nombre de paramètres libres.

2) Décrire toutes les solutions et donner une solution non nulle.

3) Montrer directement que somme de deux solutions et multiplication d'une solution par un réel est encore solution.

Corrigé de l'exercice 4

1) Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ conduisent à

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donne $0 = 0$. Le système équivalent est donc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Les inconnues principales sont x_1, x_3 ; les inconnues libres sont x_2, x_4, x_5 : il y a 3 paramètres libres.

2) Posons $x_2 = s$, $x_4 = t$ et $x_5 = u$, avec $(s,t,u) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$2x_3 - t + u = 0 \implies x_3 = \frac{t-u}{2},$$

et

$$x_1 = -s + x_3 - 2t = -s - \frac{3t+u}{2}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \left(-s - \tfrac{3t+u}{2},\ s,\ \tfrac{t-u}{2},\ t,\ u \right) : (s,t,u) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Pour $(s,t,u) = (1,0,0)$, on obtient la solution non nulle $(-1,1,0,0,0)$.

3) Soient $v = (v_1, \dots, v_5)$ et $w = (w_1, \dots, w_5)$ deux solutions de (H), et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La première équation appliquée à $\lambda v + \mu w$ donne

$$\begin{aligned} &(\lambda v_1 + \mu w_1) + (\lambda v_2 + \mu w_2) - (\lambda v_3 + \mu w_3) + 2(\lambda v_4 + \mu w_4) \\ &= \lambda(v_1 + v_2 - v_3 + 2v_4) + \mu(w_1 + w_2 - w_3 + 2w_4) = 0. \end{aligned}$$

Le même calcul appliqué aux deuxième et troisième équations donne également 0. Donc

$$\lambda v + \mu w \text{ est encore solution de } (H).$$

Exercice 5 : Discussion complète en fonction d'un paramètre

Pour $a \in \mathbb{R}$, résoudre

$$(S_a) : \quad \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + ay + z = a, \\ x + y + a^2 z = a. \end{cases}$$

1) Effectuer des opérations élémentaires pour obtenir un système équivalent échelonné.

2) Discuter, selon a, les cas de solution unique, d'infinité de solutions et d'absence de solution.

3) Déterminer explicitement l'ensemble des solutions dans chaque cas.

Indication : ne jamais diviser par une expression en a avant d'avoir étudié ses zéros.

Corrigé de l'exercice 5

1) Soustrayons la première équation aux deux autres, soit $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. On obtient

$$(S_a) \sim \begin{cases} x + y + z = 1, \\ (a-1)y = a - 1, \\ (a^2-1)z = a - 1. \end{cases}$$

Comme $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$, il faut distinguer $a = 1$, $a = -1$ et $a \notin \{-1, 1\}$ avant toute division.

2) L'étude se fait directement sur les équations échelonnées :

— Si $a \notin \{-1, 1\}$, on peut déterminer successivement z, y et x : une seule solution.

— Si $a = 1$, on obtient $x + y + z = 1$, $0 = 0$, $0 = 0$: une infinité de solutions.

— Si $a = -1$, la dernière équation devient $0 = -2$: aucune solution.

En résumé,

$$\begin{aligned} a \notin \{-1, 1\} : &\quad \text{une seule solution,} \\ a = 1 : &\quad \text{une infinité de solutions,} \\ a = -1 : &\quad \text{aucune solution.} \end{aligned}$$

3) **Cas $a \notin \{-1, 1\}$.** Les deux derniers pivots sont non nuls :

$$\begin{aligned} (a-1)y = a - 1 &\implies y = 1, \\ (a^2-1)z = a - 1 &\implies z = \frac{1}{a+1}, \\ x + y + z = 1 &\implies x = -\frac{1}{a+1}. \end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{S}_a = \left\{ \left(-\frac{1}{a+1}, 1, \frac{1}{a+1} \right) \right\}.$$

Cas $a = 1$. Toutes les équations se réduisent à $x + y + z = 1$. Posons $y = s$ et $z = t$, avec $(s, t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{S}_1 = \{(1 - s - t, s, t) : (s, t) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Cas $a = -1$. L'égalité impossible $0 = -2$ donne

$$\mathcal{S}_{-1} = \varnothing.$$

Exercice 6 : Application : interpolation polynomiale

On cherche $P(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ tel que

$$P(-1) = 2, \qquad P(1) = 0, \qquad P(2) = 3.$$

1) Traduire les trois conditions en un système linéaire.

2) Résoudre ce système par élimination et donner P.

3) Vérifier les valeurs imposées et expliquer l'unicité obtenue par le pivot.

Corrigé de l'exercice 6

1) Les conditions deviennent

$$\begin{aligned} P(-1) = 2 &\iff \alpha - \beta + \gamma = 2, \\ P(1) = 0 &\iff \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ P(2) = 3 &\iff 4\alpha + 2\beta + \gamma = 3. \end{aligned}$$

Le système à résoudre est donc

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 2, \\ \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 3. \end{cases}$$

2) On applique $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 2, \\ 2\beta = -2, \\ 6\beta - 3\gamma = -5. \end{cases}$$

L'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ donne le système échelonné

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 2, \\ 2\beta = -2, \\ -3\gamma = 1. \end{cases}$$

Par remontée,

$$\gamma = -\frac{1}{3}, \qquad \beta = -1, \qquad \alpha = 2 + \beta - \gamma = \frac{4}{3}.$$

Finalement,

$$P(X) = \frac{4}{3}X^2 - X - \frac{1}{3}.$$

3) On vérifie directement les trois égalités :

$$\begin{aligned} P(-1) &= \frac{4}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 2, \\ P(1) &= \frac{4}{3} - 1 - \frac{1}{3} = 0, \\ P(2) &= \frac{16}{3} - 2 - \frac{1}{3} = 3. \end{aligned}$$

L'élimination a donné trois pivots non nuls, 1, 2 et -3 : les trois inconnues α, β, γ sont donc déterminées de manière unique. Ainsi,

Le polynôme P trouvé est unique.