2 SÉRIE DE TRAVAUX DIRIGÉS
Espaces vectoriels et dimension finie

Énoncés des exercices 6 exercices

Consigne. Justifier chaque réponse et détailler les calculs. Sauf indication contraire, le corps des scalaires est $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace des polynômes de degré au plus d.

Exercice 1 : Reconnaître un sous-espace vectoriel

Étudier les ensembles suivants. Pour chaque sous-espace, donner une base et sa dimension ; dans les autres cas, préciser la propriété qui échoue.

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\},$$
$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\},$$
$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\},$$
$$V = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : P(1) = 0\}.$$

1) Étudier l'ensemble F.

2) Étudier l'ensemble G.

3) Étudier l'ensemble H.

4) Étudier l'ensemble V.

Exercice 2 : Base, coordonnées et extraction

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose

$$u_1 = (1,1,0), \quad u_2 = (1,0,1), \quad u_3 = (0,1,1), \quad u_4 = (2,1,1).$$

1) Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ en utilisant les relations entre vecteurs.

2) Déterminer les coordonnées de (x,y,z) dans $\mathcal{B}$, puis celles de $v = (3,2,1)$.

3) Extraire une base de $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$ et donner le rang de cette famille.

4) Compléter (u_1,u_2) en une base en choisissant un vecteur dans la base canonique.

Exercice 3 : Rang d'une famille dépendant d'un paramètre

Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère

$$u = (1,1,0), \qquad v = (0,1,1), \qquad w_a = (1,a,1).$$

1) Discuter la liberté et le rang de (u,v,w_a) selon a.

2) Pour la valeur exceptionnelle, donner une relation de liaison et une équation de l'espace engendré.

3) Pour cette valeur, déterminer si $(2,3,1)$ et $(1,0,0)$ appartiennent à l'espace engendré.

Exercice 4 : Sous-espace de polynômes et supplémentaire

Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose

$$F = \{P \in E : P(1) = P'(1) = 0\}, \qquad G = \mathbb{R}_1[X].$$

1) Montrer que F est un sous-espace et en donner une base.

2) Montrer que $E = F \oplus G$.

3) Décomposer $P = X^3 + 2X^2 - X + 1$ suivant cette somme directe.

Exercice 5 : Intersection, somme et formule de Grassmann

Dans $\mathbb{R}^4$, soient

$$F = \{(x, y, z, t) : x + y = 0,\ z + t = 0\},$$
$$G = \{(x, y, z, t) : x + z = 0,\ y + t = 0\}.$$

1) Donner une base et la dimension de chacun des espaces F et G.

2) Déterminer $F \cap G$, puis la dimension de $F + G$.

3) Montrer que $F + G = \{(x, y, z, t) : x + y + z + t = 0\}$ et en donner une base.

4) Proposer un supplémentaire de $F + G$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 6 : Polynômes pairs et impairs : une somme directe

Dans $E = \mathbb{R}_4[X]$, on définit

$$E_+ = \{P : P(-X) = P(X)\}, \qquad E_- = \{P : P(-X) = -P(X)\}.$$

1) Donner une base et la dimension de E_+ et de E_-.

2) Montrer que $E = E_+ \oplus E_-$ et donner les deux composantes d'un polynôme P quelconque.

3) Décomposer $P = 1 + 2X - 3X^2 + 4X^3 + 5X^4$.

4) Généraliser à $\mathbb{R}_n[X]$, pour $n \in \mathbb{N}$: donner les dimensions des sous-espaces des polynômes pairs et impairs.