2 SÉRIE DE TRAVAUX DIRIGÉS
Espaces vectoriels et dimension finie

Énoncés et corrigés détaillés — 6 exercices

Consigne. Justifier chaque réponse et détailler les calculs. Sauf indication contraire, le corps des scalaires est $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace des polynômes de degré au plus d.

Exercice 1 : Reconnaître un sous-espace vectoriel

Étudier les ensembles suivants. Pour chaque sous-espace, donner une base et sa dimension ; dans les autres cas, préciser la propriété qui échoue.

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\},$$
$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\},$$
$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\},$$
$$V = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : P(1) = 0\}.$$

1) Étudier l'ensemble F.

2) Étudier l'ensemble G.

3) Étudier l'ensemble H.

4) Étudier l'ensemble V.

Corrigé de l'exercice 1

1) Le vecteur nul appartient à F, car $0 - 2\cdot 0 + 0 = 0$. Si $u = (x,y,z)$ et $v = (x',y',z')$ appartiennent à F, alors, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda x + \mu x') - 2(\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') = \lambda(x - 2y + z) + \mu(x' - 2y' + z') = 0.$$

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De plus, $x = 2y - z$, d'où

$$(x,y,z) = (2y - z, y, z) = y(2,1,0) + z(-1,0,1).$$

Donc $F = \mathrm{Vect}\big((2,1,0),(-1,0,1)\big)$. Vérifions la liberté :

$$\alpha(2,1,0) + \beta(-1,0,1) = (0,0,0) \implies \begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, $\big((2,1,0),(-1,0,1)\big)$ est une base de F et $\dim F = 2$.

2) Le vecteur nul ne satisfait pas la condition définissant G :

$$0 + 0 + 0 = 0 \neq 1 \qquad \implies \qquad (0,0,0) \notin G.$$

Donc G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3) On a $u = (1,0,0) \in H$ et $v = (0,1,0) \in H$, car leur produit des deux premières coordonnées est nul. Cependant,

$$u + v = (1,1,0), \qquad 1 \cdot 1 = 1 \neq 0,$$

donc $u + v \notin H$. La stabilité par addition échoue : H n'est pas un sous-espace vectoriel.

4) Le polynôme nul appartient à V. Pour $P, Q \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = 0.$$

Ainsi, V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. Écrivons $P(X) = a + bX + cX^2$. Alors

$$P(1) = 0 \iff a + b + c = 0 \iff a = -b - c.$$

On en déduit

$$P(X) = b(X-1) + c(X^2-1), \qquad V = \mathrm{Vect}(X-1, X^2-1).$$

Si $\alpha(X-1) + \beta(X^2-1) = 0$, l'identification des coefficients de X^2 puis de X donne $\beta = 0$ et $\alpha = 0$. La famille $(X-1, X^2-1)$ est donc une base de V, et $\dim V = 2$.

Exercice 2 : Base, coordonnées et extraction

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose

$$u_1 = (1,1,0), \quad u_2 = (1,0,1), \quad u_3 = (0,1,1), \quad u_4 = (2,1,1).$$

1) Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ en utilisant les relations entre vecteurs.

2) Déterminer les coordonnées de (x, y, z) dans $\mathcal{B}$, puis celles de $v = (3,2,1)$.

3) Extraire une base de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ et donner le rang de cette famille.

4) Compléter (u_1, u_2) en une base en choisissant un vecteur dans la base canonique.

Corrigé de l'exercice 2

1) Étudions une relation de liaison

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (0,0,0).$$

L'identification des coordonnées fournit

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0, \\ \alpha + \gamma = 0, \\ \beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $\beta = -\alpha$ et $\gamma = -\alpha$. La troisième devient $-2\alpha = 0$, donc

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est libre. Elle contient trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$; c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, écrivons

$$(x, y, z) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (\alpha + \beta, \alpha + \gamma, \beta + \gamma).$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x, \\ \alpha + \gamma = y, \\ \beta + \gamma = z. \end{cases}$$

En combinant deux à deux ces égalités, on trouve

$$\alpha = \frac{x+y-z}{2}, \qquad \beta = \frac{x+z-y}{2}, \qquad \gamma = \frac{y+z-x}{2}.$$

Pour $v = (3,2,1)$, on obtient

$$\alpha = 2, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 0.$$

Les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$ sont donc $(2,1,0)$, et $v = 2u_1 + u_2$.

3) On remarque que

$$u_1 + u_2 = (1,1,0) + (1,0,1) = (2,1,1) = u_4.$$

Le vecteur u_4 est donc combinaison linéaire des trois premiers, d'où

$$\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4) = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3) = \mathbb{R}^3.$$

Une base extraite est (u_1,u_2,u_3) ; le rang de la famille initiale est 3.

4) Choisissons le vecteur canonique $e_3 = (0,0,1)$. Pour montrer que (u_1,u_2,e_3) est libre, supposons

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma e_3 = 0.$$

Alors

$$(\alpha+\beta, \alpha, \beta+\gamma) = (0,0,0) \implies \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Cette famille libre de trois vecteurs est une base de $\mathbb{R}^3$:

$$(u_1, u_2, (0,0,1)) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.$$

Exercice 3 : Rang d'une famille dépendant d'un paramètre

Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère

$$u = (1,1,0), \qquad v = (0,1,1), \qquad w_a = (1,a,1).$$

1) Discuter la liberté et le rang de (u,v,w_a) selon a.

2) Pour la valeur exceptionnelle, donner une relation de liaison et une équation de l'espace engendré.

3) Pour cette valeur, déterminer si $(2,3,1)$ et $(1,0,0)$ appartiennent à l'espace engendré.

Corrigé de l'exercice 3

1) Considérons une relation linéaire

$$\alpha u + \beta v + \gamma w_a = (0,0,0).$$

Elle équivaut au système

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta + a\gamma = 0, \\ \beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

Les première et troisième équations donnent $\alpha = \beta = -\gamma$. La deuxième devient alors

$$-\gamma - \gamma + a\gamma = 0 \quad \iff \quad (a-2)\gamma = 0.$$

Si $a \neq 2$, on obtient $\gamma = 0$ puis $\alpha = \beta = 0$: la famille est libre, donc de rang 3. Si $a = 2$, une relation non triviale apparaît, et la famille est liée. Comme u et v sont libres (leurs première et troisième coordonnées l'imposent), son rang est 2.

$$a \neq 2 : \quad \mathrm{rang}(u,v,w_a) = 3,$$
$$a = 2 : \quad \mathrm{rang}(u,v,w_2) = 2.$$

2) Pour $a = 2$,

$$w_2 = (1, 2, 1) = u + v, \qquad u + v - w_2 = 0.$$

Ainsi, $\mathrm{Vect}(u, v, w_2) = \mathrm{Vect}(u, v)$. Or

$$\alpha u + \beta v = (\alpha, \alpha + \beta, \beta).$$

Un vecteur (x, y, z) appartient à cet espace si et seulement si

$$x = \alpha, \quad z = \beta, \quad y = \alpha + \beta = x + z.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Vect}(u, v, w_2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x + z\}.$$

3) Pour le vecteur $p = (2, 3, 1)$, on vérifie

$$3 = 2 + 1, \qquad p = 2u + v \in \mathrm{Vect}(u, v, w_2).$$

En revanche, pour $q = (1, 0, 0)$, on a

$$0 \neq 1 + 0, \qquad q \notin \mathrm{Vect}(u, v, w_2).$$

Exercice 4 : Sous-espace de polynômes et supplémentaire

Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose

$$F = \{P \in E : P(1) = P'(1) = 0\}, \qquad G = \mathbb{R}_1[X].$$

1) Montrer que F est un sous-espace et en donner une base.

2) Montrer que $E = F \oplus G$.

3) Décomposer $P = X^3 + 2X^2 - X + 1$ suivant cette somme directe.

Corrigé de l'exercice 4

1) Le polynôme nul appartient à F. Si $P, Q \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$(\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = 0,$$
$$(\lambda P + \mu Q)'(1) = \lambda P'(1) + \mu Q'(1) = 0.$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de E. La condition $P(1) = 0$ implique $P = (X - 1)Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_2[X]$. En dérivant,

$$P' = Q + (X - 1)Q', \qquad P'(1) = Q(1).$$

La deuxième condition impose $Q(1) = 0$, donc $Q = (X - 1)R$, avec $R \in \mathbb{R}_1[X]$. En écrivant $R = a + bX$, on obtient

$$P(X) = (X - 1)^2(a + bX) = a(X - 1)^2 + bX(X - 1)^2.$$

Les deux polynômes sont libres :

$$\alpha(X - 1)^2 + \beta X(X - 1)^2 = 0 \implies (\alpha + \beta X)(X - 1)^2 = 0 \implies \alpha = \beta = 0.$$

Une base de F est donc $\big((X - 1)^2, X(X - 1)^2\big)$, et $\dim F = 2$.

2) On sait que $\dim E = 4$ et $\dim G = 2$. Si $Q \in F \cap G$, écrivons $Q = a + bX$. Les conditions donnent

$$Q'(1) = b = 0, \qquad Q(1) = a + b = 0,$$

d'où $a = b = 0$. Ainsi $F \cap G = \{0\}$. Comme

$$\dim F + \dim G = 2 + 2 = 4 = \dim E,$$

on en déduit $E = F \oplus G$. On peut aussi expliciter la décomposition : pour tout $P \in E$,

$$g(X) = P(1) + P'(1)(X-1) \in G, \qquad f = P - g \in F.$$

3) Pour $P(X) = X^3 + 2X^2 - X + 1$,

$$P(1) = 1 + 2 - 1 + 1 = 3, \qquad P'(X) = 3X^2 + 4X - 1, \qquad P'(1) = 6.$$

La composante dans G est donc

$$g(X) = 3 + 6(X-1) = 6X - 3.$$

La composante dans F s'écrit

$$\begin{aligned} f(X) &= P(X) - g(X) \\ &= X^3 + 2X^2 - 7X + 4 \\ &= (X-1)^2(X+4). \end{aligned}$$

Finalement,

$$P = \underbrace{(X-1)^2(X+4)}_{\in F} + \underbrace{(6X-3)}_{\in G}.$$

La décomposition est unique puisque $F \cap G = \{0\}$.

Exercice 5 : Intersection, somme et formule de Grassmann

Dans $\mathbb{R}^4$, soient

$$F = \{(x,y,z,t) : x + y = 0,\ z + t = 0\},$$
$$G = \{(x,y,z,t) : x + z = 0,\ y + t = 0\}.$$

1) Donner une base et la dimension de chacun des espaces F et G.

2) Déterminer $F \cap G$, puis la dimension de $F + G$.

3) Montrer que $F + G = \{(x,y,z,t) : x + y + z + t = 0\}$ et en donner une base.

4) Proposer un supplémentaire de $F + G$ dans $\mathbb{R}^4$.

Corrigé de l'exercice 5

1) Dans F, on a $y = -x$ et $t = -z$, d'où

$$(x,y,z,t) = (x,-x,z,-z) = x(1,-1,0,0) + z(0,0,1,-1).$$

Les deux vecteurs sont libres (leurs première et troisième coordonnées imposent l'annulation des coefficients). Ainsi,

$$F = \mathrm{Vect}((1,-1,0,0),(0,0,1,-1)), \qquad \dim F = 2.$$

Dans G, on a $z = -x$ et $t = -y$, donc

$$(x,y,z,t) = (x,y,-x,-y) = x(1,0,-1,0) + y(0,1,0,-1).$$

Ces deux générateurs sont libres, d'où

$$G = \mathrm{Vect}((1,0,-1,0),(0,1,0,-1)), \qquad \dim G = 2.$$

2) Un élément de $F \cap G$ vérifie

$$\begin{cases} y = -x, \\ t = -z, \\ z = -x, \\ t = -y. \end{cases}$$

Il vient $y = z = -x$ et $t = x$, donc

$$F \cap G = \{(s, -s, -s, s) : s \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}(1, -1, -1, 1).$$

On en déduit $\dim(F \cap G) = 1$. La formule de Grassmann donne

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

3) Posons $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$. Pour tout $f \in F$, on a $x + y = 0$ et $z + t = 0$, donc $x + y + z + t = 0$. Il en est de même pour tout $g \in G$. Par addition,

$$F + G \subset H.$$

D'autre part, $t = -x - y - z$ dans H, donc

$$(x, y, z, t) = x(1, 0, 0, -1) + y(0, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, -1).$$

Ces trois vecteurs sont libres, d'où $\dim H = 3$. Comme $\dim(F + G) = 3$, l'inclusion précédente devient $F + G = H$. Une base de $F + G$ extraite des générateurs précédents est

$$\big((1, -1, 0, 0),\ (0, 0, 1, -1),\ (1, 0, -1, 0)\big).$$

En effet, la relation $\alpha(1, -1, 0, 0) + \beta(0, 0, 1, -1) + \gamma(1, 0, -1, 0) = 0$ donne successivement $\alpha = 0$ (deuxième coordonnée), $\beta = 0$ (quatrième), puis $\gamma = 0$.

4) Posons $D = \mathbb{R}(0, 0, 0, 1)$. Si $(0, 0, 0, t) \in H$, alors $t = 0$, donc

$$H \cap D = \{0\}.$$

Or $\dim H + \dim D = 3 + 1 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$. Donc

$$\mathbb{R}^4 = (F + G) \oplus D, \qquad D = \mathbb{R}(0, 0, 0, 1).$$

On peut vérifier directement :

$$(x, y, z, t) = (x, y, z, -x - y - z) + (0, 0, 0, x + y + z + t).$$

Exercice 6 : Polynômes pairs et impairs : une somme directe

Dans $E = \mathbb{R}_4[X]$, on définit

$$E_+ = \{P : P(-X) = P(X)\}, \qquad E_- = \{P : P(-X) = -P(X)\}.$$

1) Donner une base et la dimension de E_+ et de E_-.

2) Montrer que $E = E_+ \oplus E_-$ et donner les deux composantes d'un polynôme P quelconque.

3) Décomposer $P = 1 + 2X - 3X^2 + 4X^3 + 5X^4$.

4) Généraliser à $\mathbb{R}_n[X]$, pour $n \in \mathbb{N}$: donner les dimensions des sous-espaces des polynômes pairs et impairs.

Corrigé de l'exercice 6

1) Écrivons $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$. Alors

$$P(-X) = a_0 - a_1X + a_2X^2 - a_3X^3 + a_4X^4.$$

La condition $P(-X) = P(X)$ équivaut à $a_1 = a_3 = 0$. Par conséquent,

$$E_+ = \mathrm{Vect}(1, X^2, X^4), \qquad \dim E_+ = 3.$$

De même, $P(-X) = -P(X)$ équivaut à $a_0 = a_2 = a_4 = 0$. Ainsi,

$$E_- = \mathrm{Vect}(X, X^3), \qquad \dim E_- = 2.$$

Les familles indiquées sont libres par unicité des coefficients d'un polynôme.

2) Pour tout $P \in E$, posons

$$P_+(X) = \frac{P(X) + P(-X)}{2}, \qquad P_-(X) = \frac{P(X) - P(-X)}{2}.$$

Par substitution de $-X$ à X, on vérifie

$$P_+(-X) = P_+(X), \qquad P_-(-X) = -P_-(X).$$

Ainsi, $P_+ \in E_+$ et $P_- \in E_-$. De plus,

$$P_+(X) + P_-(X) = \frac{2P(X)}{2} = P(X),$$

donc $E = E_+ + E_-$. Si $Q \in E_+ \cap E_-$, alors

$$Q(-X) = Q(X) \quad \text{et} \quad Q(-X) = -Q(X) \quad \Longrightarrow \quad 2Q(X) = 0.$$

Comme on travaille sur $\mathbb{R}$, $Q = 0$. Par conséquent,

$$E = E_+ \oplus E_-.$$

3) Pour $P = 1 + 2X - 3X^2 + 4X^3 + 5X^4$, on a

$$P(-X) = 1 - 2X - 3X^2 - 4X^3 + 5X^4.$$

Par les formules précédentes,

$$P_+(X) = \frac{P(X) + P(-X)}{2} = 1 - 3X^2 + 5X^4,$$
$$P_-(X) = \frac{P(X) - P(-X)}{2} = 2X + 4X^3.$$

On retrouve bien $P = P_+ + P_-$.

4) Dans $\mathbb{R}_n[X]$, une base de l'espace des polynômes pairs est formée des monômes

$$1, X^2, X^4, \ldots, X^{2\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Le nombre de ces monômes vaut $\lfloor n/2 \rfloor + 1$, donc

$$\dim E_+ = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

De même, une base de l'espace des polynômes impairs comprend les monômes de degré impair inférieur ou égal à n : leur nombre est $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$. D'où

$$\dim E_- = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Ces dimensions vérifient

$$\dim E_+ + \dim E_- = n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X].$$

La décomposition $P = P_+ + P_-$ reste valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, l'espace impair est $\{0\}$, de dimension 0.