3 SÉRIE DE TRAVAUX DIRIGÉS
Applications linéaires

Énoncés des exercices — 7 exercices

Consigne. Justifier chaque réponse et détailler les calculs. Tous les espaces sont réels. Pour chaque noyau ou image demandé, préciser une base et sa dimension.

Exercice 1 : Reconnaître la linéarité

On considère les applications suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, &\quad f(x,y) = (x+2y, 3x-y), \\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, &\quad g(x,y) = (x+1, y), \\ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad h(x,y) = xy, \\ D : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X], &\quad D(P) = P', \\ \varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}, &\quad \varphi(P) = P(1) - 2P(0). \end{aligned}$$

1) Déterminer si f est linéaire.

2) Déterminer si g est linéaire.

3) Déterminer si h est linéaire.

4) Montrer que D est linéaire.

5) Montrer que φ est linéaire.

6) L'égalité $u(0) = 0$ suffit-elle à prouver la linéarité d'une application u ?

Exercice 2 : Noyau, image, antécédents et sous-espaces

On définit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ par

$$u(x,y,z,t) = (x+y+t,\ y+z-t,\ x+2y+z).$$

1) Justifier la linéarité de u et déterminer son noyau.

2) Déterminer son image et son rang. Est-elle injective ? surjective ?

3) Résoudre $u(x,y,z,t) = (1,2,3)$, puis $u(x,y,z,t) = (1,2,4)$.

4) Pour $H = \mathrm{Vect}(e_1, e_3) \subset \mathbb{R}^4$ et $D = \mathbb{R}(1,0,1) \subset \mathbb{R}^3$, déterminer $u(H)$ et $u^{-1}(D)$.

Exercice 3 : Application prescrite sur une base

Dans $\mathbb{R}^3$, soient

$$b_1 = (1,0,1), \qquad b_2 = (1,1,0), \qquad b_3 = (0,1,1).$$

1) Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base.

2) Justifier l'existence et l'unicité d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$f(b_1) = (1,1,0), \quad f(b_2) = (0,1,1), \quad f(b_3) = (1,0,1).$$

3) Déterminer $f(x,y,z)$ et montrer que f est un automorphisme.

4) Calculer f^{-1} et f^3.

Exercice 4 : Un automorphisme de l'espace des polynômes

Soit $T : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ défini par

$$T(P) = P + XP'.$$

1) Montrer que T est un endomorphisme et calculer $T(1), T(X), T(X^2), T(X^3)$.

2) Déterminer $\ker T$, $\operatorname{Im} T$ et le rang de T.

3) Donner une formule pour $T^{-1}(Q)$ et résoudre $T(P) = 1 + 2X - 3X^2 + 8X^3$.

Exercice 5 : Évaluation et interpolation

On considère $\Phi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\Phi(P) = (P(0), P(1), P(2)).$$

1) Montrer que Φ est linéaire et déterminer son noyau.

2) En déduire son rang et sa surjectivité.

3) Construire $L_0, L_1, L_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $\Phi(L_0) = (1,0,0)$, $\Phi(L_1) = (0,1,0)$, $\Phi(L_2) = (0,0,1)$.

4) Décrire tous les $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(0) = 1$, $P(1) = 0$, $P(2) = 3$. Quel est l'unique tel polynôme de degré au plus 2 ?

Exercice 6 : Projection et symétrie dans $\mathbb{R}^3$

Soient

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}, \qquad G = \mathbb{R}(1,1,1).$$

1) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ et décomposer un vecteur $v = (x,y,z)$.

2) Donner la projection p sur F parallèlement à G et vérifier $p^2 = p$.

3) Déterminer le noyau, l'image et le rang de p.

4) Déterminer la symétrie $s = 2p - \mathrm{id}$ et vérifier $s^2 = \mathrm{id}$. Quels sont ses vecteurs fixes et les vecteurs transformés en leur opposé ?

Exercice 7 : Composition nulle et théorème du rang

Soit E un espace réel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$.

1) Montrer que $\operatorname{Im} u \subset \ker u$, puis que $2 \operatorname{rg} u \leq n$.

2) Montrer que $\operatorname{Im} u = \ker u$ si et seulement si $n = 2 \operatorname{rg} u$.

3) Dans $\mathbb{R}^4$, étudier $u(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, x_4, 0, 0)$.

4) Le théorème du rang implique-t-il toujours $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$?