3 SÉRIE DE TRAVAUX DIRIGÉS
Applications linéaires

Énoncés et corrigés détaillés 7 exercices

Consigne. Justifier chaque réponse et détailler les calculs. Tous les espaces sont réels. Pour chaque noyau ou image demandé, préciser une base et sa dimension.

Exercice 1 : Reconnaître la linéarité

On considère les applications suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, &\quad f(x,y) = (x+2y, 3x-y), \\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, &\quad g(x,y) = (x+1, y), \\ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad h(x,y) = xy, \\ D : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X], &\quad D(P) = P', \\ \varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}, &\quad \varphi(P) = P(1) - 2P(0). \end{aligned}$$

1) Déterminer si f est linéaire.

2) Déterminer si g est linéaire.

3) Déterminer si h est linéaire.

4) Montrer que D est linéaire.

5) Montrer que φ est linéaire.

6) L'égalité $u(0) = 0$ suffit-elle à prouver la linéarité d'une application u ?

Corrigé de l'exercice 1

1) Soient $v = (x,y)$, $w = (x',y')$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On calcule

$$\begin{aligned} f(\lambda v + \mu w) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ &= (\lambda(x+2y) + \mu(x'+2y'),\ \lambda(3x-y) + \mu(3x'-y')) \\ &= \lambda f(v) + \mu f(w). \end{aligned}$$

La propriété est vraie pour tous v, w, λ, μ : f est linéaire.

2) Toute application linéaire envoie 0 sur 0. Or

$$g(0,0) = (1,0) \neq (0,0).$$

Donc g n'est pas linéaire.

3) Prenons $v = (1,0)$ et $w = (0,1)$. On a

$$h(v) = 0, \quad h(w) = 0, \qquad h(v+w) = h(1,1) = 1.$$

Ainsi, $h(v+w) \neq h(v) + h(w)$: h n'est pas linéaire.

4) Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $P' \in \mathbb{R}_2[X]$: l'application D est bien définie. De plus, pour $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$D(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q' = \lambda D(P) + \mu D(Q).$$

Par conséquent, D est une application linéaire.

5) Pour $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(1) - 2(\lambda P + \mu Q)(0)\\ &= \lambda(P(1) - 2P(0)) + \mu(Q(1) - 2Q(0))\\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q).\end{aligned}$$

Par conséquent, φ est une application linéaire.

6) Non. La condition $u(0) = 0$ est nécessaire, mais elle ne suffit pas. L'application h de la question 3 vérifie $h(0,0) = 0$, alors que

$$h((1,0) + (0,1)) = 1 \neq 0 = h(1,0) + h(0,1).$$

La stabilité par addition peut donc échouer malgré $u(0) = 0$.

Exercice 2 : Noyau, image, antécédents et sous-espaces

On définit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ par

$$u(x,y,z,t) = (x + y + t,\ y + z - t,\ x + 2y + z).$$

1) Justifier la linéarité de u et déterminer son noyau.

2) Déterminer son image et son rang. Est-elle injective ? surjective ?

3) Résoudre $u(x,y,z,t) = (1,2,3)$, puis $u(x,y,z,t) = (1,2,4)$.

4) Pour $H = \mathrm{Vect}(e_1, e_3) \subset \mathbb{R}^4$ et $D = \mathbb{R}(1,0,1) \subset \mathbb{R}^3$, déterminer $u(H)$ et $u^{-1}(D)$.

Corrigé de l'exercice 2

1) Chaque coordonnée de u est une expression linéaire homogène en (x,y,z,t). Ainsi, pour $v, w \in \mathbb{R}^4$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$u(\lambda v + \mu w) = \lambda u(v) + \mu u(w).$$

Déterminons le noyau : $u(x,y,z,t) = 0$ équivaut à

$$\begin{cases} x + y + t = 0,\\ y + z - t = 0,\\ x + 2y + z = 0. \end{cases}$$

La troisième équation est la somme des deux premières. En posant $z = s$, $t = r$, on obtient

$$y = -s + r, \qquad x = s - 2r,$$

d'où

$$\ker u = \{(s - 2r, -s + r, s, r) : (s,r) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\big((1,-1,1,0), (-2,1,0,1)\big).$$

Ces deux vecteurs sont libres : leur troisième et leur quatrième coordonnées imposent successivement $s = 0$ et $r = 0$ dans une relation nulle. Ils forment une base de $\ker u$; ainsi $\dim(\ker u) = 2$.

2) Posons $a = x + y + t$ et $b = y + z - t$. La troisième coordonnée vaut

$$x + 2y + z = (x + y + t) + (y + z - t) = a + b.$$

Toute image a donc la forme $(a, b, a + b)$. Réciproquement,

$$u(a, 0, b, 0) = (a, b, a + b).$$

Ainsi,

$$\operatorname{Im} u = \{(a, b, a + b) : (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{Vect}\big((1, 0, 1), (0, 1, 1)\big).$$

Les deux générateurs sont libres : une relation $\alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1) = 0$ donne $\alpha = \beta = 0$. Ils constituent une base de l'image, donc $\operatorname{rg} u = 2$. On vérifie le théorème du rang :

$$\dim(\ker u) + \operatorname{rg} u = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4.$$

Puisque $\ker u \neq \{0\}$, u n'est pas injective ; puisque $\operatorname{rg} u = 2 < 3$, elle n'est pas surjective.

3) Le vecteur $(1, 2, 3)$ appartient à $\operatorname{Im} u$, puisque $3 = 1 + 2$. Une solution particulière est $(1, 0, 2, 0)$, car

$$u(1, 0, 2, 0) = (1, 2, 3).$$

Les autres solutions diffèrent de cette solution d'un élément du noyau :

$$\mathcal{S}_1 = \big\{(1 + s - 2r, -s + r, 2 + s, r) : (s, r) \in \mathbb{R}^2\big\}.$$

En revanche, $(1, 2, 4) \notin \operatorname{Im} u$, car $4 \neq 1 + 2$. Par conséquent, l'équation $u(x, y, z, t) = (1, 2, 4)$ n'a pas de solution.

4) Notons $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1, 0)$. Comme u est linéaire,

$$\begin{aligned} u(H) &= \operatorname{Vect}\big(u(e_1), u(e_3)\big) \\ &= \operatorname{Vect}\big((1, 0, 1), (0, 1, 1)\big) = \operatorname{Im} u. \end{aligned}$$

La même base que dans la question 2 convient et $\dim u(H) = 2$. Pour l'image réciproque, $u(x, y, z, t) \in D$ signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x + y + t, y + z - t, x + 2y + z) = (\lambda, 0, \lambda).$$

Comme la troisième coordonnée est déjà la somme des deux premières, il suffit d'imposer $y + z - t = 0$, soit $t = y + z$. Donc

$$\begin{aligned} u^{-1}(D) &= \{(x, y, z, y + z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}\big((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\big). \end{aligned}$$

Les trois générateurs sont libres par leurs trois premières coordonnées. Ils forment une base, et $\dim u^{-1}(D) = 3$.

Exercice 3 : Application prescrite sur une base

Dans $\mathbb{R}^3$, soient

$$b_1 = (1, 0, 1), \qquad b_2 = (1, 1, 0), \qquad b_3 = (0, 1, 1).$$

1) Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base.

2) Justifier l'existence et l'unicité d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$f(b_1) = (1, 1, 0), \quad f(b_2) = (0, 1, 1), \quad f(b_3) = (1, 0, 1).$$

3) Déterminer $f(x, y, z)$ et montrer que f est un automorphisme.

4) Calculer f^{-1} et f^3.

Corrigé de l'exercice 3

1) Considérons, pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, l'écriture

$$(x,y,z)=\alpha b_1+\beta b_2+\gamma b_3.$$

Elle équivaut à

$$\begin{cases}\alpha+\beta=x,\\ \beta+\gamma=y,\\ \alpha+\gamma=z.\end{cases}$$

En combinant ces trois égalités, on trouve

$$\alpha=\frac{x+z-y}{2},\quad \beta=\frac{x+y-z}{2},\quad \gamma=\frac{y+z-x}{2}.$$

L'existence et l'unicité de ces coefficients pour tout (x,y,z) montrent que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Les vecteurs $f(b_1),f(b_2),f(b_3)$ sont prescrits. Puisque $\mathcal{B}$ est une base, tout $v\in\mathbb{R}^3$ s'écrit d'une seule manière $v=\alpha b_1+\beta b_2+\gamma b_3$. Posons

$$f(v)=\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,1)+\gamma(1,0,1).$$

Cette définition est sans ambiguïté et est linéaire, car les coordonnées (α,β,γ) se combinent linéairement. Toute application linéaire ayant les images demandées doit satisfaire la même formule ; l'existence et l'unicité sont ainsi établies.

3) En utilisant les coefficients calculés à la question 1,

$$\begin{aligned}f(x,y,z)&=\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,1)+\gamma(1,0,1)\\&=(\alpha+\gamma,\alpha+\beta,\beta+\gamma)\\&=(z,x,y).\end{aligned}$$

Pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, l'équation $f(x,y,z)=(a,b,c)$ devient

$$(z,x,y)=(a,b,c)\quad\Longleftrightarrow\quad(x,y,z)=(b,c,a).$$

Il existe donc un unique antécédent de chaque vecteur de $\mathbb{R}^3$. L'application f est bijective et linéaire : c'est un automorphisme.

4) La résolution précédente donne directement

$$f^{-1}(a,b,c)=(b,c,a).$$

Calculons les itérées :

$$\begin{aligned}f(x,y,z)&=(z,x,y),\\ f^2(x,y,z)&=f(z,x,y)=(y,z,x),\\ f^3(x,y,z)&=f(y,z,x)=(x,y,z).\end{aligned}$$

Ainsi, $f^3=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, et l'on retrouve $f^{-1}=f^2$.

Exercice 4 : Un automorphisme de l'espace des polynômes

Soit $T:\mathbb{R}_3[X]\to\mathbb{R}_3[X]$ défini par

$$T(P)=P+XP'.$$

1) Montrer que T est un endomorphisme et calculer $T(1),T(X),T(X^2),T(X^3)$.

2) Déterminer $\ker T$, $\operatorname{Im}T$ et le rang de T.

3) Donner une formule pour $T^{-1}(Q)$ et résoudre $T(P)=1+2X-3X^2+8X^3$.

Corrigé de l'exercice 4

1) Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a $P + XP' \in \mathbb{R}_3[X]$. Par linéarité de la dérivation, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(\lambda P + \mu Q) &= \lambda P + \mu Q + X(\lambda P' + \mu Q') \\ &= \lambda T(P) + \mu T(Q). \end{aligned}$$

Ainsi, T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Pour tout $k \in \{0,1,2,3\}$, $T(X^k) = (k+1)X^k$, d'où

$$T(1) = 1, \quad T(X) = 2X, \quad T(X^2) = 3X^2, \quad T(X^3) = 4X^3.$$

2) Écrivons $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. Alors

$$T(P) = a_0 + 2a_1X + 3a_2X^2 + 4a_3X^3.$$

Par identification des coefficients,

$$T(P) = 0 \iff \begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, $\ker T = \{0\}$ et $\dim \ker T = 0$ (sa base est la famille vide). Le théorème du rang donne

$$\operatorname{rg} T = \dim \mathbb{R}_3[X] - \dim \ker T = 4 - 0 = 4.$$

Donc $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}_3[X]$, de base $(1, X, X^2, X^3)$ et de dimension 4. L'endomorphisme T est un automorphisme.

3) Pour $Q = q_0 + q_1X + q_2X^2 + q_3X^3$, on cherche P tel que $T(P) = Q$. L'identification des coefficients donne

$$a_0 = q_0, \quad a_1 = \frac{q_1}{2}, \quad a_2 = \frac{q_2}{3}, \quad a_3 = \frac{q_3}{4}.$$

On obtient alors

$$T^{-1}(Q) = q_0 + \frac{q_1}{2}X + \frac{q_2}{3}X^2 + \frac{q_3}{4}X^3.$$

Avec $(q_0, q_1, q_2, q_3) = (1, 2, -3, 8)$, il vient

$$P(X) = 1 + X - X^2 + 2X^3.$$

Vérification : $P' = 1 - 2X + 6X^2$, donc

$$P + XP' = 1 + 2X - 3X^2 + 8X^3.$$

Exercice 5 : Évaluation et interpolation

On considère $\Phi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\Phi(P) = (P(0), P(1), P(2)).$$

1) Montrer que Φ est linéaire et déterminer son noyau.

2) En déduire son rang et sa surjectivité.

3) Construire $L_0, L_1, L_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $\Phi(L_0) = (1,0,0)$, $\Phi(L_1) = (0,1,0)$, $\Phi(L_2) = (0,0,1)$.

4) Décrire tous les $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(0) = 1$, $P(1) = 0$, $P(2) = 3$. Quel est l'unique tel polynôme de degré au plus 2 ?

Corrigé de l'exercice 5

1) Pour $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P(0) + \mu Q(0), \lambda P(1) + \mu Q(1),\\ &\qquad \lambda P(2) + \mu Q(2))\\ &= \lambda\Phi(P) + \mu\Phi(Q).\end{aligned}$$

Donc Φ est linéaire. Un polynôme P appartient au noyau si et seulement si

$$P(0) = P(1) = P(2) = 0.$$

Les trois racines $0, 1, 2$ étant distinctes, P est divisible par $X(X-1)(X-2)$. Puisque $\deg P \leq 3$, on obtient

$$\ker\Phi = \{\lambda X(X-1)(X-2) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Le polynôme $X(X-1)(X-2)$ forme une base du noyau ; $\dim\ker\Phi = 1$.

2) Le théorème du rang donne

$$\operatorname{rg}\Phi = \dim\mathbb{R}_3[X] - \dim\ker\Phi = 4 - 1 = 3.$$

L'image de Φ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3. Par suite $\operatorname{Im}\Phi = \mathbb{R}^3$ (base canonique), et Φ est surjective.

3) On impose respectivement la valeur 1 au point 0, 1 et 2, et la valeur 0 aux deux autres points. Posons

$$L_0(X) = \frac{(X-1)(X-2)}{2}, \quad L_1(X) = -X(X-2), \quad L_2(X) = \frac{X(X-1)}{2}.$$

Vérifions :

$$\begin{aligned}(L_0(0), L_0(1), L_0(2)) &= (1, 0, 0),\\ (L_1(0), L_1(1), L_1(2)) &= (0, 1, 0),\\ (L_2(0), L_2(1), L_2(2)) &= (0, 0, 1).\end{aligned}$$

Les trois polynômes répondent donc aux conditions demandées.

4) Une solution particulière des trois conditions d'évaluation est

$$\begin{aligned}P_0(X) &= L_0(X) + 3L_2(X)\\ &= \frac{(X-1)(X-2) + 3X(X-1)}{2}\\ &= 2X^2 - 3X + 1.\end{aligned}$$

Tout autre polynôme P vérifiant les mêmes conditions satisfait $\Phi(P - P_0) = 0$, donc $P - P_0 \in \ker\Phi$. Ainsi

$$P(X) = 2X^2 - 3X + 1 + \lambda X(X-1)(X-2), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le coefficient de X^3 est λ. Par conséquent, $\deg P \leq 2$ si et seulement si $\lambda = 0$. L'unique polynôme cherché dans $\mathbb{R}_2[X]$ est donc $P_0 = 2X^2 - 3X + 1$.

Exercice 6 : Projection et symétrie dans $\mathbb{R}^3$

Soient

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}, \qquad G = \mathbb{R}(1, 1, 1).$$

1) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ et décomposer un vecteur $v = (x, y, z)$.

2) Donner la projection p sur F parallèlement à G et vérifier $p^2 = p$.

3) Déterminer le noyau, l'image et le rang de p.

4) Déterminer la symétrie $s = 2p - \mathrm{id}$ et vérifier $s^2 = \mathrm{id}$. Quels sont ses vecteurs fixes et les vecteurs transformés en leur opposé ?

Corrigé de l'exercice 6

1) La condition $x+y+z=0$ équivaut à $z=-x-y$, d'où

$$(x,y,z) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1).$$

Les deux vecteurs obtenus sont libres, donc

$$F = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1)), \qquad \dim F = 2.$$

L'espace G est de dimension 1, de base $((1,1,1))$. Si $t(1,1,1) \in F$, alors $3t=0$, donc $t=0$; ainsi $F \cap G = \{0\}$. Puisque $2+1=3$, on a $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$. Pour $v=(x,y,z)$, posons $m=(x+y+z)/3$. Alors

$$(x,y,z) = (x-m, y-m, z-m) + m(1,1,1),$$

avec $(x-m)+(y-m)+(z-m)=0$. C'est la décomposition demandée.

2) La projection sur F parallèlement à G conserve la composante dans F :

$$p(x,y,z) = (x-m, y-m, z-m), \qquad m = \frac{x+y+z}{3}.$$

Notons $p(v)=(x',y',z')$. Comme $x'+y'+z'=0$, la moyenne de ses coordonnées est 0. En appliquant une deuxième fois p,

$$p(p(v)) = (x',y',z') = p(v).$$

Ainsi, $p^2 = p$.

3) La condition $p(v)=0$ équivaut à

$$x-m = y-m = z-m = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=y=z.$$

Donc $\ker p = G$, de base $((1,1,1))$ et de dimension 1. Tout $f \in F$ possède une moyenne nulle et satisfait $p(f)=f$. De plus $p(v) \in F$ pour tout v ; ainsi $\operatorname{Im} p = F$. La base de F de la question 1 est donc une base de l'image et

$$\operatorname{rg} p = \dim F = 2, \qquad 1+2 = \dim \mathbb{R}^3.$$

4) Par définition,

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= 2p(x,y,z) - (x,y,z) \\ &= (x-2m, y-2m, z-2m). \end{aligned}$$

En utilisant $p^2=p$ et $\mathrm{id} \circ p = p \circ \mathrm{id} = p$, on obtient

$$s^2 = (2p-\mathrm{id})^2 = 4p^2 - 4p + \mathrm{id} = \mathrm{id}.$$

Enfin, si $v=f+g$ avec $f \in F$ et $g \in G$, alors

$$s(v) = 2f - (f+g) = f-g.$$

D'où

$$s(v)=v \iff g=0 \iff v \in F,$$

et

$$s(v)=-v \iff f=0 \iff v \in G.$$

Les vecteurs fixes sont ceux de F ; les vecteurs envoyés sur leur opposé sont ceux de G.

Exercice 7 : Composition nulle et théorème du rang

Soit E un espace réel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$.

1) Montrer que $\operatorname{Im} u \subset \ker u$, puis que $2 \operatorname{rg} u \leq n$.

2) Montrer que $\operatorname{Im} u = \ker u$ si et seulement si $n = 2 \operatorname{rg} u$.

3) Dans $\mathbb{R}^4$, étudier $u(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, x_4, 0, 0)$.

4) Le théorème du rang implique-t-il toujours $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$?

Corrigé de l'exercice 7

1) Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Comme $u^2 = 0$, on a

$$u(y) = u(u(x)) = u^2(x) = 0.$$

Donc $y \in \ker u$, ce qui établit $\operatorname{Im} u \subset \ker u$. Posons $r = \operatorname{rg} u$. L'inclusion implique $\dim \operatorname{Im} u \leq \dim \ker u$. Par le théorème du rang,

$$r \leq n - r \quad \Longleftrightarrow \quad 2r \leq n.$$

2) Puisque $\operatorname{Im} u \subset \ker u$, ces deux sous-espaces sont égaux si et seulement s'ils ont la même dimension. On obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} u = \ker u &\iff \dim \operatorname{Im} u = \dim \ker u \\ &\iff r = n - r \\ &\iff n = 2r. \end{aligned}$$

3) On a $u^2(x_1, x_2, x_3, x_4) = u(x_3, x_4, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$. Pour déterminer le noyau, résolvons

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_3 = x_4 = 0.$$

D'où $\ker u = \{(a, b, 0, 0) : (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. D'autre part,

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, x_4, 0, 0),$$

et (x_3, x_4) peut prendre toute valeur dans $\mathbb{R}^2$. Ainsi,

$$\ker u = \operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(e_1, e_2), \qquad \operatorname{rg} u = 2.$$

La famille (e_1, e_2) est une base de chacun des deux espaces, qui ont tous deux dimension 2 ; $n = 4 = 2 \operatorname{rg} u$.

4) Non. Dans l'exemple de la question 3,

$$\ker u = \operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(e_1, e_2) \neq \{0\}.$$

Leur intersection est donc non nulle :

$$\ker u \cap \operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(e_1, e_2).$$

De plus, $\ker u + \operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(e_1, e_2) \neq \mathbb{R}^4$. On n'a donc pas $\mathbb{R}^4 = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$. Le théorème du rang assure uniquement

$$\dim E = \dim \ker u + \dim \operatorname{Im} u;$$

il ne garantit pas la somme directe de ces deux sous-espaces.