4 SÉRIE DE TRAVAUX DIRIGÉS
Matrices

Énoncés des exercices — 7 exercices

Consigne. Justifier chaque réponse et détailler les calculs. Les matrices sont réelles. Calculer les inverses et les rangs sans déterminant.

Exercice 1 : Vrai ou faux ?

Justifier chaque réponse par une preuve ou un contre-exemple.

1) Pour toutes matrices carrées A, B de même ordre, $AB = BA$.

2) L'égalité $AB = 0$ impose $A = 0$ ou $B = 0$.

3) Si A et B sont inversibles, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

4) Si le produit AB est défini, alors $(AB)^T = B^T A^T$.

5) Pour toute matrice carrée réelle M, il existe une unique décomposition $M = S + K$ avec $S^T = S$ et $K^T = -K$.

Exercice 2 : Produits rectangulaires et trace

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Préciser les tailles de A, B, AB, BA, puis calculer AB et BA.

2) Calculer $A^T A$ et vérifier que cette matrice est symétrique.

3) Comparer $\operatorname{tr}(AB)$ et $\operatorname{tr}(BA)$. Démontrer l'égalité générale pour $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.

Exercice 3 : Calcul d'une inverse par Gauss–Jordan

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Réduire $[A \mid I_3]$ et en déduire A^{-1}.

2) Vérifier par multiplication que la matrice obtenue est une inverse.

3) Résoudre $AX = b$ pour $b = (1, 2, 3)^T$, puis pour un second membre quelconque $b = (a, b_0, c)^T$.

Exercice 4 : Rang, noyau et colonnes pivots

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Échelonner M_a et discuter son rang selon a.

2) Donner une base du noyau de $X \mapsto M_a X$ dans chaque cas.

3) Donner une base de l'image en choisissant des colonnes de la matrice initiale. Pour quelles valeurs l'application est-elle surjective sur $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5 : Matrice nilpotente, puissances et récurrence

Soient

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = I_3 + N.$$

1) Calculer N^2 et N^3.

2) Montrer que $A^{-1} = I_3 - N + N^2$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, établir une formule explicite de A^n.

4) Résoudre $X_{n+1} = AX_n$ avec $X_0 = (a, b, c)^T$.

Exercice 6 : Matrice d'une application dans deux bases

On considère $D : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_1[X]$, $D(P) = P'$. Soient

$$\mathcal{B} = (1, X, X^2), \quad \mathcal{C} = (1, X), \quad \mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)^2), \quad \mathcal{C}' = (1, X-1).$$

1) Donner $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(D)$ et son rang.

2) Calculer $P = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}'}$.

3) Calculer directement $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(D)$ et vérifier $A' = Q^{-1}AP$.

4) Pour $R = 2 + 3(X-1) + 4(X-1)^2$, vérifier la relation $[D(R)]_{\mathcal{C}'} = A'[R]_{\mathcal{B}'}$.

Exercice 7 : Changement de base et puissances

Dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^2$, un endomorphisme u a pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose $b_1 = (1, 1)$, $b_2 = (1, -1)$ et $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$.

1) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base et calculer $P = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ et P^{-1}.

2) Calculer $u(b_1), u(b_2)$ puis $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Vérifier $D = P^{-1}AP$.

3) En déduire une formule pour A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Donner $[v]_{\mathcal{B}}$ pour $v = (4, 2)$, puis calculer $u^n(v)$.