4 SÉRIE DE TRAVAUX DIRIGÉS
Matrices

Énoncés et corrigés détaillés — 7 exercices

Consigne. Justifier chaque réponse et détailler les calculs. Les matrices sont réelles. Calculer les inverses et les rangs sans déterminant.

Exercice 1 : Vrai ou faux ?

Justifier chaque réponse par une preuve ou un contre-exemple.

1) Pour toutes matrices carrées A, B de même ordre, $AB = BA$.

2) L'égalité $AB = 0$ impose $A = 0$ ou $B = 0$.

3) Si A et B sont inversibles, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

4) Si le produit AB est défini, alors $(AB)^T = B^T A^T$.

5) Pour toute matrice carrée réelle M, il existe une unique décomposition $M = S + K$ avec $S^T = S$ et $K^T = -K$.

Corrigé de l'exercice 1

1) **Faux.** Considérons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct donne

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc $AB \neq BA$. Le produit matriciel n'est pas commutatif en général.

2) **Faux.** Avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

les deux matrices sont non nulles, alors que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une matrice peut donc être un diviseur de zéro.

3) **Vrai.** Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sont inversibles, alors

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = I_n,$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = I_n.$$

Ainsi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. L'ordre des facteurs est inversé.

4) Vrai. Supposons $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Pour $1 \le i \le p$ et $1 \le j \le m$,

$$\begin{aligned}((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} &= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij}.\end{aligned}$$

Les deux matrices ayant la même taille, $(AB)^T = B^T A^T$.

5) Vrai. Posons

$$S = \frac{M + M^T}{2}, \qquad K = \frac{M - M^T}{2}.$$

Alors

$$S^T = \frac{M^T + M}{2} = S, \quad K^T = \frac{M^T - M}{2} = -K, \quad S + K = M.$$

Si $M = S_1 + K_1$ avec $S_1^T = S_1$ et $K_1^T = -K_1$, alors $M^T = S_1 - K_1$. Par addition et soustraction,

$$2S_1 = M + M^T, \qquad 2K_1 = M - M^T.$$

Cette décomposition est donc unique.

Exercice 2 : Produits rectangulaires et trace

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Préciser les tailles de A, B, AB, BA, puis calculer AB et BA.

2) Calculer $A^T A$ et vérifier que cette matrice est symétrique.

3) Comparer $\mathrm{tr}(AB)$ et $\mathrm{tr}(BA)$. Démontrer l'égalité générale pour $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.

Corrigé de l'exercice 2

1) On a $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{3,2}(\mathbb{R})$; ainsi $AB \in M_2(\mathbb{R})$ et $BA \in M_3(\mathbb{R})$. Le produit ligne-colonne donne

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 0\cdot 3 \\ -1\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 0 & -1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, $(BA)_{21} = 2\cdot 1 + 1\cdot(-1) = 1$ et $(BA)_{33} = 0\cdot 0 + 3\cdot 1 = 3$.

2) La transposée de A est

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1^2 + (-1)^2 & 1\cdot 2 + (-1)\cdot 0 & 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 0\cdot(-1) & 2^2 + 0^2 & 2\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 0\cdot 2 + 1\cdot 0 & 0^2 + 1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $(A^T A)^T = A^T A$: cette matrice est symétrique.

3) Les produits calculés à la question 1 donnent

$$\operatorname{tr}(AB) = 5 + 3 = 8, \qquad \operatorname{tr}(BA) = 1 + 4 + 3 = 8.$$

Plus généralement, si $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{m} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj} = \operatorname{tr}(BA).\end{aligned}$$

Cette identité reste vraie lorsque $m \neq n$.

Exercice 3 : Calcul d'une inverse par Gauss–Jordan

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Réduire $[A \mid I_3]$ et en déduire A^{-1}.

2) Vérifier par multiplication que la matrice obtenue est une inverse.

3) Résoudre $AX = b$ pour $b = (1, 2, 3)^T$, puis pour un second membre quelconque $b = (a, b_0, c)^T$.

Corrigé de l'exercice 3

1) On part de la matrice augmentée $[A \mid I_3]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Effectuons $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Puis

$$L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3, \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_3, \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2.$$

On obtient

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Par conséquent,

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Notons $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La multiplication des lignes par les colonnes donne

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad CA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $A\,\frac{1}{2}C = \frac{1}{2}C\,A = I_3$, ce qui confirme la formule trouvée.

3) Pour un second membre quelconque $b = (a, b_0, c)^T$, on obtient

$$X = A^{-1}b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a - b_0 + c \\ a + b_0 - c \\ -a + b_0 + c \end{pmatrix}.$$

En particulier, pour $b = (1, 2, 3)^T$,

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - 2 + 3 \\ 1 + 2 - 3 \\ -1 + 2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La solution est unique, car A est inversible.

Exercice 4 : Rang, noyau et colonnes pivots

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Échelonner M_a et discuter son rang selon a.

2) Donner une base du noyau de $X \mapsto M_a X$ dans chaque cas.

3) Donner une base de l'image en choisissant des colonnes de la matrice initiale. Pour quelles valeurs l'application est-elle surjective sur $\mathbb{R}^3$?

Corrigé de l'exercice 4

1) Effectuons $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$M_a \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis $L_3 \leftarrow L_3 - (a-1)L_2$ donne

$$M_a \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

Il y a donc trois pivots si $a \neq 2$ et deux pivots si $a = 2$:

$$\operatorname{rg}(M_a) = \begin{cases} 3, & a \neq 2, \\ 2, & a = 2. \end{cases}$$

2) Cherchons $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ tel que $M_a X = 0$. Le système échelonné est

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0, \\ (2-a)x_4 = 0. \end{cases}$$

Si $a \neq 2$, alors $x_4 = x_3 = 0$, et $x_1 = -2x_2$. Ainsi

$$\ker M_a = \operatorname{Vect}((-2, 1, 0, 0)), \qquad \dim \ker M_a = 1.$$

Si $a = 2$, posons $x_2 = t$ et $x_4 = s$. Alors $x_3 = -s$ et $x_1 = -2t + s$, d'où

$$\begin{aligned} \ker M_2 &= \{t(-2, 1, 0, 0) + s(1, 0, -1, 1) : s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}((-2, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 1)), \quad \dim \ker M_2 = 2. \end{aligned}$$

Les familles affichées sont libres par examen des coordonnées.

3) Les colonnes pivots de la matrice échelonnée indiquent quelles colonnes *de la matrice initiale* forment une base de l'image. Si $a \neq 2$, ce sont les colonnes 1, 3 et 4 :

$$\operatorname{Im} M_a = \operatorname{Vect}((1,2,1),(1,3,a),(0,1,1)) = \mathbb{R}^3.$$

Si $a = 2$, seules les colonnes 1 et 3 sont pivots :

$$\operatorname{Im} M_2 = \operatorname{Vect}((1,2,1),(1,3,2)), \qquad \dim \operatorname{Im} M_2 = 2.$$

L'application $X \mapsto M_a X$ est donc surjective sur $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a \neq 2$.

Exercice 5 : Matrice nilpotente, puissances et récurrence

Soient

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = I_3 + N.$$

1) Calculer N^2 et N^3.

2) Montrer que $A^{-1} = I_3 - N + N^2$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, établir une formule explicite de A^n.

4) Résoudre $X_{n+1} = AX_n$ avec $X_0 = (a,b,c)^T$.

Corrigé de l'exercice 5

1) La multiplication directe donne

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^3 = N^2 N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc N est nilpotente d'indice 3.

2) Puisque $N^3 = 0$, on a

$$(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 + N^3 = I_3,$$
$$(I_3 - N + N^2)(I_3 + N) = I_3 + N^3 = I_3.$$

Par suite,

$$A^{-1} = I_3 - N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Les matrices I_3 et N commutent. Par le binôme de Newton,

$$(I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k.$$

Comme $N^k = 0$ pour $k \geq 3$, la somme se réduit à

$$A^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, la formule se vérifie directement ; elle est donc valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Par récurrence, la relation $X_{n+1} = AX_n$ implique $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: c'est vrai au rang 0, et $X_{n+1} = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$. En utilisant l'expression de A^n,

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + nb + \frac{n(n-1)}{2} c \\ b + nc \\ c \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 : Matrice d'une application dans deux bases

On considère $D : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_1[X]$, $D(P) = P'$. Soient

$$\mathcal{B} = (1, X, X^2), \quad \mathcal{C} = (1, X), \quad \mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)^2), \quad \mathcal{C}' = (1, X-1).$$

1) Donner $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(D)$ et son rang.

2) Calculer $P = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}'}$.

3) Calculer directement $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(D)$ et vérifier $A' = Q^{-1}AP$.

4) Pour $R = 2 + 3(X-1) + 4(X-1)^2$, vérifier la relation $[D(R)]_{\mathcal{C}'} = A'[R]_{\mathcal{B}'}$.

Corrigé de l'exercice 6

1) Dans les bases $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{C} = (1, X)$,

$$D(1) = 0, \qquad D(X) = 1, \qquad D(X^2) = 2X.$$

Les colonnes de la matrice sont leurs coordonnées dans $\mathcal{C}$:

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ses deux lignes sont indépendantes, donc $\mathrm{rg}(A) = 2$.

2) On développe les vecteurs de $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{C}'$ dans les bases initiales :

$$\begin{aligned} &1 = 1, \quad X - 1 = -1 + X, \quad (X-1)^2 = 1 - 2X + X^2, \\ &1 = 1, \quad X - 1 = -1 + X. \end{aligned}$$

D'où les matrices de passage

$$P = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Directement, $D(1) = 0$, $D(X-1) = 1$ et $D((X-1)^2) = 2(X-1)$. Ainsi

$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifions le changement de bases :

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A'.$$

4) On a

$$[R]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad A'[R]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$D(R) = 3 + 8(X - 1), \qquad [D(R)]_{\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

On vérifie donc bien $[D(R)]_{\mathcal{C}'} = A'[R]_{\mathcal{B}'}$.

Exercice 7 : Changement de base et puissances

Dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^2$, un endomorphisme u a pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose $b_1 = (1, 1)$, $b_2 = (1, -1)$ et $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$.

1) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base et calculer $P = P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ et P^{-1}.

2) Calculer $u(b_1), u(b_2)$ puis $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Vérifier $D = P^{-1}AP$.

3) En déduire une formule pour A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Donner $[v]_{\mathcal{B}}$ pour $v = (4, 2)$, puis calculer $u^n(v)$.

Corrigé de l'exercice 7

1) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cherchons (α, β) tel que $(x, y) = \alpha b_1 + \beta b_2$. Alors

$$\alpha + \beta = x, \qquad \alpha - \beta = y \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{x + y}{2}, \quad \beta = \frac{x - y}{2}.$$

Ces coordonnées existent et sont uniques : $\mathcal{B}$ est donc une base. Les matrices de passage sont

$$P = P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

car $P^2 = 2I_2$.

2) Comme $u(x, y) = (2x + y, x + 2y)$,

$$u(b_1) = u(1, 1) = (3, 3) = 3b_1, \qquad u(b_2) = u(1, -1) = (1, -1) = b_2.$$

Les coordonnées des images dans $\mathcal{B}$ sont donc

$$D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifions la formule de changement de base :

$$AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D.$$

3) De $D = P^{-1}AP$, on déduit $A = PDP^{-1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1}, \qquad D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le produit fournit

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, $n = 0$ donne bien $A^0 = I_2$.

4) Pour $v = (4, 2)$, les coordonnées trouvées à la question 1 donnent

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{4+2}{2} \\ \frac{4-2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v = 3b_1 + b_2.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} u^n(v) &= 3\,u^n(b_1) + u^n(b_2) \\ &= 3 \cdot 3^n b_1 + b_2 = (3^{n+1}+1,\, 3^{n+1}-1). \end{aligned}$$

Pour $n = 0$, on retrouve bien $v = (4, 2)$.