5 SÉRIE DE TRAVAUX DIRIGÉS
Déterminants et règle de Cramer

Énoncés des exercices 7 exercices

Consigne. Justifier chaque réponse et détailler les calculs. Les matrices sont réelles. Préciser les propriétés utilisées dans chaque calcul de déterminant.

Exercice 1 : Vrai ou faux ?

Pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, justifier les affirmations suivantes ou donner un contre-exemple.

1) $\det(A+B) = \det A + \det B$.

2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

3) Si deux lignes de A sont proportionnelles, alors $\det A = 0$.

4) Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ne change pas le déterminant.

5) Si $\det A = 0$, alors le système $AX = b$ n'a aucune solution, quel que soit b.

Exercice 2 : Calculs par développement et opérations élémentaires

Calculer les déterminants suivants en indiquant une méthode adaptée :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, on pose

$$V(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

1) Calculer D_1 par développement de Laplace.

2) Calculer D_2 à l'aide d'opérations élémentaires.

3) Montrer que $V(a,b,c) = (b-a)(c-a)(c-b)$.

4) En déduire quand les trois colonnes de la dernière matrice forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 : Déterminant, valeurs exceptionnelles et rang par les mineurs

Pour $a \in \mathbb{R}$, soit

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que $\det A_a = (a-1)^2(a+2)$ sans utiliser de valeurs propres.

2) En déduire les valeurs de a pour lesquelles A_a est inversible.

3) Déterminer son rang pour chaque valeur exceptionnelle à l'aide d'un mineur non nul ou de ses colonnes.

4) Donner une base de son noyau dans chaque cas.

Exercice 4 : Cofacteurs, comatrice et inverse

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $\det A$ par développement de Laplace.

2) Calculer les neuf cofacteurs et la comatrice $\mathrm{Com}(A) = (C_{ij})$.

3) En déduire A^{-1} et vérifier $A\,\mathrm{Com}(A)^T = (\det A) I_3$.

4) Résoudre $AX = (1,0,1)^T$ à l'aide de cette inverse.

Exercice 5 : Résolution d'un système par Cramer

On considère le système

$$(S) : \quad \begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y + z = -1, \\ x + 2y - z = 7. \end{cases}$$

1) Calculer le déterminant principal et justifier l'application de la règle de Cramer.

2) Calculer explicitement les trois déterminants de remplacement, puis résoudre (S).

3) Vérifier la solution dans le système initial.

Exercice 6 : Cramer et discussion suivant deux paramètres

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on considère

$$(S_{a,b}) : \quad \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + ay + z = 1, \\ x + y + az = b. \end{cases}$$

1) Calculer le déterminant principal et préciser quand Cramer s'applique.

2) Dans ce cas, calculer les déterminants de remplacement et la solution.

3) Étudier tous les cas exceptionnels. Donner les rangs de la matrice des coefficients et de la matrice augmentée.

Exercice 7 : Déterminant d'un endomorphisme et changement de base

Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on définit $u(P)(X) = P(2X+1)$. Soient

$$\mathcal{B} = (1, X, X^2), \qquad \mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)^2).$$

1) Justifier que u est un endomorphisme. Calculer $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\det u$.

2) Calculer $P = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$, puis directement $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$.

3) Vérifier $\det A' = \det A$ et expliquer cette invariance par la formule de changement de base.

4) Montrer que u est un automorphisme et donner son inverse. La famille $(u(1), u(X), u(X^2))$ est-elle une base ?