5 SÉRIE DE TRAVAUX DIRIGÉS
Déterminants et règle de Cramer

Énoncés et corrigés détaillés — 7 exercices

Consigne. Justifier chaque réponse et détailler les calculs. Les matrices sont réelles. Préciser les propriétés utilisées dans chaque calcul de déterminant.

Exercice 1 : Vrai ou faux ?

Pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, justifier les affirmations suivantes ou donner un contre-exemple.

1) $\det(A+B) = \det A + \det B$.

2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

3) Si deux lignes de A sont proportionnelles, alors $\det A = 0$.

4) Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ne change pas le déterminant.

5) Si $\det A = 0$, alors le système $AX = b$ n'a aucune solution, quel que soit b.

Corrigé de l'exercice 1

1) Faux. Prenons $A = B = I_2$. Alors

$$\det(A+B) = \det(2I_2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \qquad \det A + \det B = 1 + 1 = 2.$$

Donc $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ en général.

2) Vrai. Si A est d'ordre n, multiplier A par λ revient à multiplier chacune de ses n lignes par λ. Par multilinéarité du déterminant,

$$\det(\lambda A) = \underbrace{\lambda \cdots \lambda}_{n \text{ facteurs}} \det A = \lambda^n \det A.$$

La formule reste vraie pour $\lambda = 0$.

3) Vrai. Si $L_i = \lambda L_j$ avec $i \neq j$, le déterminant s'annule car les lignes sont liées. En effet,

$$\det(L_1, \ldots, \lambda L_j, \ldots, L_j, \ldots, L_n) = \lambda \det(L_1, \ldots, L_j, \ldots, L_j, \ldots, L_n) = 0.$$

Cela inclut $\lambda = 0$, c'est-à-dire une ligne nulle.

4) Vrai. Notons $D = \det(L_1, \ldots, L_i, \ldots, L_n)$. La linéarité par rapport à la ligne i donne

$$\begin{aligned} \det(L_1, \ldots, L_i + \lambda L_j, \ldots, L_n) &= D + \lambda \det(L_1, \ldots, L_j, \ldots, L_n) \\ &= D + \lambda \cdot 0 = D, \end{aligned}$$

car le deuxième déterminant possède deux lignes identiques.

5) Faux. Considérons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\det A = 0$, mais $AX = b$ équivaut à

$$\begin{cases} x = 1, \\ 0 = 0, \end{cases} \qquad \mathcal{S} = \{(1, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Un déterminant nul empêche d'appliquer Cramer, sans imposer l'incompatibilité du système.

Exercice 2 : Calculs par développement et opérations élémentaires

Calculer les déterminants suivants en indiquant une méthode adaptée :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, on pose

$$V(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

1) Calculer D_1 par développement de Laplace.

2) Calculer D_2 à l'aide d'opérations élémentaires.

3) Montrer que $V(a, b, c) = (b - a)(c - a)(c - b)$.

4) En déduire quand les trois colonnes de la dernière matrice forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Corrigé de l'exercice 2

1) En développant D_1 suivant la première ligne (signes $+, -, +$),

$$\begin{aligned} D_1 &= 1\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1(-1) - 2(-8) + 3(2) = 21. \end{aligned}$$

2) Les opérations $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ conservent le déterminant. Effectuons successivement $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$, en utilisant à chaque étape les nouvelles lignes :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Il s'agit d'un déterminant triangulaire supérieur.

3) Soustrayons la première colonne aux deux autres ($C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$). Alors

$$\begin{aligned} V(a, b, c) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b - a & c - a \\ a^2 & b^2 - a^2 & c^2 - a^2 \end{vmatrix} \\ &= (b - a)(c - a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & a + b & a + c \end{vmatrix} \\ &= (b - a)(c - a)\big((a + c) - (a + b)\big) \\ &= (b - a)(c - a)(c - b). \end{aligned}$$

On a utilisé $b^2 - a^2 = (b - a)(a + b)$ et $c^2 - a^2 = (c - a)(a + c)$, sans jamais diviser par ces facteurs.

4) Les colonnes constituent une base de $\mathbb{R}^3$ exactement lorsque leur déterminant est non nul. D'après la question précédente,

$$V(a,b,c) \neq 0 \iff (b-a)(c-a)(c-b) \neq 0 \iff a \neq b,\ a \neq c,\ b \neq c.$$

La condition est donc : a, b, c deux à deux distincts.

Exercice 3 : Déterminant, valeurs exceptionnelles et rang par les mineurs

Pour $a \in \mathbb{R}$, soit

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que $\det A_a = (a-1)^2(a+2)$ sans utiliser de valeurs propres.

2) En déduire les valeurs de a pour lesquelles A_a est inversible.

3) Déterminer son rang pour chaque valeur exceptionnelle à l'aide d'un mineur non nul ou de ses colonnes.

4) Donner une base de son noyau dans chaque cas.

Corrigé de l'exercice 3

1) On remplace la première colonne par la somme des trois colonnes, $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, sans changer le déterminant. La nouvelle première colonne vaut $(a+2)(1,1,1)^T$. Ainsi

$$\begin{aligned} \det A_a &= (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \\ &= (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} \\ &= (a+2)(a-1)^2. \end{aligned}$$

Dans la deuxième égalité, nous avons appliqué $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$.

2) Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Par la factorisation obtenue,

$$\det A_a \neq 0 \iff (a-1)^2(a+2) \neq 0 \iff a \notin \{-2, 1\}.$$

Pour ces valeurs, $\operatorname{rg} A_a = 3$ et $\ker A_a = \{0\}$.

3) Les valeurs exceptionnelles sont $a = 1$ et $a = -2$. Pour $a = 1$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ses colonnes sont identiques et non nulles, donc $\operatorname{rg} A_1 = 1$. Pour $a = -2$, on a $\det A_{-2} = 0$, mais le mineur

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0.$$

Il en résulte $2 \leq \operatorname{rg} A_{-2} < 3$, donc $\operatorname{rg} A_{-2} = 2$.

4) Si $a \notin \{-2, 1\}$, l'inversibilité entraîne $\ker A_a = \{0\}$ (base vide). Pour $a = 1$, l'équation $A_1 X = 0$ se réduit à $x + y + z = 0$. En posant $y = s$ et $z = t$,

$$X = (-s - t, s, t) = s(-1, 1, 0) + t(-1, 0, 1).$$

Donc $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est une base de $\ker A_1$ (de dimension 2). Pour $a = -2$, le vecteur $(1, 1, 1)$ vérifie

$$A_{-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème du rang, $\dim \ker A_{-2} = 3 - 2 = 1$, donc $((1, 1, 1))$ est une base et $\ker A_{-2} = \mathbb{R}(1, 1, 1)$.

Exercice 4 : Cofacteurs, comatrice et inverse

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $\det A$ par développement de Laplace.

2) Calculer les neuf cofacteurs et la comatrice $\mathrm{Com}(A) = (C_{ij})$.

3) En déduire A^{-1} et vérifier $A\,\mathrm{Com}(A)^T = (\det A) I_3$.

4) Résoudre $AX = (1, 0, 1)^T$ à l'aide de cette inverse.

Corrigé de l'exercice 4

1) Développons $\det A$ suivant la première ligne :

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 \\ &= 2(4 - 1) - (2 - 0) = 4. \end{aligned}$$

2) Le cofacteur d'indice (i, j) est $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i, j)$, où $A(i, j)$ désigne la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j. Les neuf calculs sont

$$\begin{array}{lll} C_{11} = 4 - 1 = 3, & C_{12} = -(2 - 0) = -2, & C_{13} = 1 - 0 = 1, \\ C_{21} = -(2 - 0) = -2, & C_{22} = 4 - 0 = 4, & C_{23} = -(2 - 0) = -2, \\ C_{31} = 1 - 0 = 1, & C_{32} = -(2 - 0) = -2, & C_{33} = 4 - 1 = 3. \end{array}$$

Ainsi

$$\mathrm{Com}(A) = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) Puisque $\det A = 4 \neq 0$, la formule de la comatrice fournit

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{Com}(A)^T}{\det A} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La comatrice est ici symétrique. Vérifions l'identité demandée :

$$\begin{aligned} A\,\mathrm{Com}(A)^T &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = (\det A) I_3. \end{aligned}$$

4) On calcule $X = A^{-1}b$ pour $b = (1,0,1)^T$:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solution est unique, car A est inversible.

Exercice 5 : Résolution d'un système par Cramer

On considère le système

$$(S) : \quad \begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y + z = -1, \\ x + 2y - z = 7. \end{cases}$$

1) Calculer le déterminant principal et justifier l'application de la règle de Cramer.

2) Calculer explicitement les trois déterminants de remplacement, puis résoudre (S).

3) Vérifier la solution dans le système initial.

Corrigé de l'exercice 5

1) Le déterminant des coefficients est

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1(1-2) - 1(-2-1) + 1(4+1) \\ &= -1 + 3 + 5 = 7 \neq 0. \end{aligned}$$

Le système est donc de Cramer et admet une solution unique.

2) En remplaçant successivement chaque colonne des coefficients par le second membre $(2,-1,7)^T$, on trouve

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(1-2) - (1-7) + (-2+7) = 9,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = (1-7) - 2(-2-1) + (14+1) = 15,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = (-7+2) - (14+1) + 2(4+1) = -10.$$

Par la règle de Cramer,

$$(x,y,z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right) = \left(\frac{9}{7}, \frac{15}{7}, -\frac{10}{7}\right).$$

3) La substitution dans les trois équations donne

$$\begin{aligned}\frac{9}{7}+\frac{15}{7}-\frac{10}{7}&=\frac{14}{7}=2,\\ 2\frac{9}{7}-\frac{15}{7}-\frac{10}{7}&=\frac{-7}{7}=-1,\\ \frac{9}{7}+2\frac{15}{7}+\frac{10}{7}&=\frac{49}{7}=7.\end{aligned}$$

Les trois égalités sont vérifiées : la solution est correcte.

Exercice 6 : Cramer et discussion suivant deux paramètres

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on considère

$$(S_{a,b}) : \quad \begin{cases} x+y+z=1,\\ x+ay+z=1,\\ x+y+az=b. \end{cases}$$

1) Calculer le déterminant principal et préciser quand Cramer s'applique.

2) Dans ce cas, calculer les déterminants de remplacement et la solution.

3) Étudier tous les cas exceptionnels. Donner les rangs de la matrice des coefficients et de la matrice augmentée.

Corrigé de l'exercice 6

1) Le déterminant principal vaut

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&0\\0&0&a-1\end{vmatrix}=(a-1)^2,$$

après $L_2 \leftarrow L_2-L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3-L_1$. La règle de Cramer s'applique exactement lorsque $a \neq 1$.

2) Supposons $a \neq 1$. En remplaçant les colonnes par $(1,1,b)^T$, les déterminants sont

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\b&1&a\end{vmatrix}=(a-1)(a-b),$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&b&a\end{vmatrix}=0,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\1&1&b\end{vmatrix}=(a-1)(b-1).$$

Pour Δ_x, on peut faire $L_2 \leftarrow L_2-L_1$, $L_3 \leftarrow L_3-bL_1$:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&0\\0&1-b&a-b\end{vmatrix}=(a-1)(a-b).$$

On obtient par Cramer

$$(x,y,z)=\left(\frac{a-b}{a-1},0,\frac{b-1}{a-1}\right).$$

Les rangs des matrices des coefficients et augmentée valent 3.

3) Pour $a = 1$, le système devient

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + y + z = 1, \\ x + y + z = b. \end{cases}$$

Si $b = 1$, une seule équation est indépendante. Les deux rangs valent 1 et

$$\mathcal{S}_{1,1} = \{(1 - s - t, s, t) : (s, t) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Si $b \neq 1$, l'élimination conduit à $0 = b - 1 \neq 0$:

$$\mathcal{S}_{1,b} = \varnothing, \qquad \operatorname{rg} A = 1, \qquad \operatorname{rg}(A \mid B) = 2.$$

En effet, la matrice augmentée possède une ligne non nulle $(0, 0, 0 \mid b - 1)$ en plus de la première.

Exercice 7 : Déterminant d'un endomorphisme et changement de base

Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on définit $u(P)(X) = P(2X + 1)$. Soient

$$\mathcal{B} = (1, X, X^2), \qquad \mathcal{B}' = (1, X - 1, (X - 1)^2).$$

1) Justifier que u est un endomorphisme. Calculer $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\det u$.

2) Calculer $P = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$, puis directement $A' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$.

3) Vérifier $\det A' = \det A$ et expliquer cette invariance par la formule de changement de base.

4) Montrer que u est un automorphisme et donner son inverse. La famille $(u(1), u(X), u(X^2))$ est-elle une base ?

Corrigé de l'exercice 7

1) L'application $u(P)(X) = P(2X + 1)$ est linéaire :

$$u(\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda P(2X + 1) + \mu Q(2X + 1).$$

Elle envoie $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui-même. Or

$$u(1) = 1, \quad u(X) = 2X + 1, \quad u(X^2) = (2X + 1)^2 = 4X^2 + 4X + 1.$$

Dans $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, les colonnes des coordonnées donnent

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det u = \det A = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8.$$

2) Puisque $X - 1 = -1 + X$ et $(X - 1)^2 = 1 - 2X + X^2$, la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$ est

$$P = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir directement les images dans $\mathcal{B}'$, posons $Y = X - 1$. On a

$$\begin{aligned} u(1) &= 1, \\ u(X - 1) &= 2X = 2 + 2Y, \\ u((X - 1)^2) &= 4X^2 = 4 + 8Y + 4Y^2. \end{aligned}$$

Par lecture des coefficients,

$$A' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3) Les matrices A et A' sont triangulaires supérieures ; ainsi

$$\det A = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8 = \det A'.$$

Plus généralement, l'égalité $A' = P^{-1}AP$ entraîne

$$\begin{aligned}\det A' &= \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) \\ &= \frac{1}{\det P} \det(A) \det(P) = \det A,\end{aligned}$$

car P est inversible (ici $\det P = 1$).

4) Comme $\det u = 8 \neq 0$, u est un automorphisme. Si $Q(X) = P(2X+1)$, remplacer X par $(X-1)/2$ donne

$$P(X) = Q\left(\frac{X-1}{2}\right).$$

Ainsi

$$u^{-1}(Q)(X) = Q\left(\frac{X-1}{2}\right).$$

En effet,

$$\begin{aligned}u\big(u^{-1}(Q)\big)(X) &= Q\left(\frac{(2X+1)-1}{2}\right) = Q(X), \\ u^{-1}\big(u(P)\big)(X) &= P\left(2\frac{X-1}{2}+1\right) = P(X).\end{aligned}$$

Enfin, $(u(1), u(X), u(X^2))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$: son déterminant dans $\mathcal{B}$ vaut $8 \neq 0$.