UNIVERSITÉ MOHAMMED V

FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT

Département de Mathématiques

FORMATION UNIVERSITAIRE

Licence – Sciences Mathématiques

Algèbre I

CHAPITRE 1

Logique et raisonnements

Propositions, connecteurs, quantificateurs et méthodes de démonstration

SUPPORT DE COURS

Prof. Mohamed Najib LAATABI

najib.laatabi@um5r.ac.ma

mohamednajiblaatabi.com

Toute remarque ou suggestion est la bienvenue. Si vous constatez une erreur dans ce document, merci de bien vouloir la signaler.

Année universitaire • **2026–2027**

Sommaire du chapitre

Notations et symboles **ii**

1 Logique et raisonnements **1**
1.1 Propositions et assertions . . . 1
1.1.1 Notions de proposition et d'assertion . . . 1
1.2 Connecteurs logiques . . . 2
1.2.1 Négation (NON logique) . . . 2
1.2.2 Conjonction (ET logique) . . . 3
1.2.3 Disjonction (OU logique) . . . 3
1.2.4 Implication . . . 4
1.2.5 Négation d'une implication . . . 4
1.2.6 Réciproque et équivalence . . . 5
1.2.7 Contraposée d'une implication . . . 5
1.3 Quantificateurs . . . 6
1.3.1 Quantificateurs universel et existentiel . . . 6
1.4 Méthodes de raisonnement . . . 6
1.4.1 Raisonnement direct (déduction) . . . 6
1.4.2 Raisonnement par disjonction de cas . . . 7
1.4.3 Raisonnement par contraposition . . . 7
1.4.4 Raisonnement par l'absurde . . . 8
1.4.5 Raisonnement par contre-exemple . . . 8
1.5 Raisonnement par récurrence . . . 9
1.5.1 Principe de récurrence simple . . . 9
1.5.2 Récurrence à deux pas (double) . . . 9
1.5.3 Récurrence forte . . . 10

Références bibliographiques **12**

Notations et symboles

Symbole	Signification
Ensembles et nombres	
$\mathbb{N},\ \mathbb{Z}$	Entiers naturels (avec 0) ; entiers relatifs
$\mathbb{Q},\ \mathbb{R},\ \mathbb{C}$	Nombres rationnels ; réels ; complexes
$\mathbb{R}^+$	Réels positifs ou nuls : $[0, +\infty[$
$\mathbb{R}_-^*$	Réels strictement négatifs : $]-\infty, 0[$
$i \in \mathbb{C}$	Unité imaginaire, vérifiant $i^2 = -1$
$x \in E,\ x \notin E$	x appartient à E ; x n'appartient pas à E
$A \subseteq E$	L'ensemble A est inclus dans E
$x \geq 0,\ x < 0$	x est positif ou nul ; x est strictement négatif
Propositions et connecteurs logiques	
$P,\ Q$	Propositions ou assertions, selon le contexte
$P(x)$	Assertion dépendant de la variable libre x
$P(x_0)$	Proposition obtenue en fixant $x = x_0$
V, F	Valeurs de vérité : VRAI ; FAUX
$\neg P,\ \overline{P}$	Négation de P : « non P »
$P \wedge Q$	Conjonction : « P et Q »
$P \vee Q$	Disjonction inclusive : « P ou Q », éventuellement les deux
$P \implies Q$	Implication : « si P, alors Q »
$Q \implies P$	Réciproque de l'implication $P \implies Q$
$\neg Q \implies \neg P$	Contraposée de l'implication $P \implies Q$
$P \iff Q$	Équivalence : « P si et seulement si Q »
Quantificateurs et récurrence	
$\forall x \in E,\ P(x)$	Pour tout élément x de E, l'assertion $P(x)$ est vraie
$\exists x \in E,\ P(x)$	Il existe au moins un élément x de E pour lequel $P(x)$ est vraie
$P(n)$	Propriété dépendant d'un entier naturel n
n_0	Rang initial d'une démonstration par récurrence
$P(n) \implies P(n+1)$	Passage du rang n au rang $n+1$ dans une récurrence simple
$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$	Suite indexée par les entiers naturels
$n \mapsto n+1$	Application qui associe à un entier son successeur

Chapitre 1

Logique et raisonnements

1.1 Propositions et assertions

1.1.1 Notions de proposition et d'assertion

Définition 1.1.1

Une proposition est un énoncé mathématique prenant une valeur de vérité : soit **VRAI** soit **FAUX**.

Exemple 1

i) L'énoncé P_1 : (Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad x^2 + 1 = 0$).
Cette proposition est **FAUSSE** (car par exemple pour $x = 1$, $1^2 + 1 = 2 \neq 0$).

ii) L'énoncé P_2 : (Il existe $x \in \mathbb{C}$, $\quad x^2 + 1 = 0$).
Cette proposition est **VRAIE** dans $\mathbb{C}$ (car $i^2 + 1 = 0$).

Remarque 1

Logique binaire et abus de notation :

i) **Principe du tiers exclu :** Une proposition est soit **VRAIE**, soit **FAUSSE**. Il n'y a pas d'autre possibilité, et elle ne peut jamais être les deux à la fois.

ii) **Convention :** Pour une proposition P, on a coutume d'écrire simplement « P » pour affirmer que « P est **VRAIE** ».

Définition 1.1.2 – Assertion

Une **assertion** $P(x)$ est un énoncé mathématique qui dépend d'une ou plusieurs variables libres. Pour chaque valeur fixée de ces variables, l'énoncé devient une proposition, vraie ou fausse.
Pour obtenir une proposition sans variable libre, on peut préciser une valeur (par exemple $P(2)$) ou quantifier la variable : $\forall x \in E$, $P(x)$ ou $\exists x \in E$, $P(x)$. On ne suppose *pas* de quantification universelle implicite.

Remarque 2

Pour une valeur x_0 fixée, l'énoncé $P(x_0)$ respecte le principe du tiers exclu (il est soit Vrai, soit Faux).

Exemple 2

Soit $x \in \mathbb{R}$.

i) L'assertion $P(x)$: "$x \geq 0$".

  i) Vraie pour $x \in \mathbb{R}^+$ et Fausse pour $x \in \mathbb{R}^*_-$.

  ii) La proposition $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x)$ est **fausse**.

ii) L'assertion $Q(x)$: "$x^2 \geq 0$".

  i) Elle est vérifiée pour tout réel x.

  ii) La proposition $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x)$ est **vraie**.

Définition 1.1.3 – Équivalence logique

On dit que deux propositions P et Q sont **équivalentes** lorsqu'elles ont la **même valeur de vérité**. Pour deux assertions, cette équivalence doit être vraie pour chaque valeur admise des variables. On note cette équivalence :

$$P \iff Q$$

1.2 Connecteurs logiques

1.2.1 Négation (NON logique)

Définition 1.2.1

Soit P une assertion. La **négation** de P, notée $\overline{P}$ (ou parfois $\neg P$), est l'assertion dont la valeur de vérité est strictement opposée à celle de P.
Elle est définie par la table de vérité suivante :

Valeur de P	**Valeur de $\overline{P}$**
V	F
F	V

Propriété 1.2.1 – Principe de double négation

Pour toute assertion P, la négation de la négation revient à l'assertion de départ. On a l'équivalence :

$$\overline{\overline{P}} \iff P$$

Démonstration. Cette équivalence se démontre en comparant les tables de vérité. En appliquant deux fois la définition de la négation, on retrouve les valeurs initiales de P.

P	$\overline{P}$	$\overline{\overline{\mathbf{P}}}$
V	F	**V**
F	V	**F**

Les colonnes P et $\overline{\overline{P}}$ étant identiques, la propriété est vérifiée. ■

1.2.2 Conjonction (ET logique)

Définition 1.2.2 – Conjonction

Soient P et Q deux assertions. La **conjonction** de P et Q, notée $P \wedge Q$ (lire « P et Q »), est l'assertion qui est **VRAIE** uniquement lorsque les deux assertions sont simultanément vraies. Dans tous les autres cas, c'est-à-dire si au moins l'une des deux est fausse, la conjonction est **FAUSSE**.
Cette définition se traduit par la table de vérité suivante :

P	Q	$\mathbf{P \wedge Q}$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

Exemple 3

Considérons un réel x.
L'assertion formée par la conjonction de « $x \geq 0$ » et « $x < 0$ » est toujours fausse, car aucun nombre réel ne peut vérifier ces deux conditions simultanément (l'intersection est vide).

Propriété 1.2.2 – Propriétés algébriques et simplification

L'opérateur de conjonction possède des structures algébriques remarquables. Il est à la fois **commutatif** et **associatif**, ce qui signifie que l'ordre des propositions n'a pas d'importance et que l'on peut écrire $P \wedge Q \wedge R$ sans parenthèses. De plus, il vérifie l'idempotence, c'est-à-dire que $P \wedge P$ équivaut simplement à P.

Démonstration. Ces résultats découlent directement de l'analyse de la table de vérité. ■

1.2.3 Disjonction (OU logique)

Définition 1.2.3

Soient P et Q deux assertions. La **disjonction** de P et Q, notée $P \vee Q$ (lire « P ou Q »), est l'assertion qui est **VRAIE** lorsqu'au moins l'une des deux assertions est vraie. Elle ne devient **FAUSSE** que dans le cas unique où les deux assertions P et Q sont simultanément fausses.
Cette définition est résumée par la table de vérité suivante :

P	Q	$\mathbf{P \vee Q}$
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Propriété 1.2.3 – Propriétés algébriques et simplification

L'opérateur de disjonction possède des propriétés de structure similaires à l'addition. Il est **commutatif** et **associatif**, ce qui permet d'intervertir l'ordre des propositions et d'écrire des enchaînements du type $P \vee Q \vee R$ sans parenthèses. Il vérifie également l'idempotence puisque la proposition $P \vee P$ est équivalente à P.

Démonstration. Ces résultats découlent directement de l'analyse de la table de vérité. ■

Propriété 1.2.4 – Lois de De Morgan

La négation d'une conjonction est la disjonction des négations :

$$\overline{P \wedge Q} \iff \overline{P} \vee \overline{Q}$$

La négation d'une disjonction est la conjonction des négations :

$$\overline{P \vee Q} \iff \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

Démonstration. La table suivante établit la première identité. La seconde se vérifie de la même manière :

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \wedge Q$	$\mathbf{\overline{P \wedge Q}}$	$\mathbf{\overline{P} \vee \overline{Q}}$
V	V	F	F	V	**F**	**F**
V	F	F	V	F	**V**	**V**
F	V	V	F	F	**V**	**V**
F	F	V	V	F	**V**	**V**

■

1.2.4 Implication

Définition 1.2.4

Soient P et Q deux assertions ; l'implication $\implies$ est un connecteur logique défini par :

$$(P \implies Q) \iff (\overline{P} \vee Q)$$

et se lit « P implique Q ».

Pour montrer la proposition $P \implies Q$, on suppose que pour une valeur de ses variables libres P est VRAI, et on montre qu'alors pour ces mêmes valeurs Q est VRAI.
Pour montrer que la proposition $P \implies Q$ est FAUSSE : on montre que pour une valeur de ses variables libres, on a P sans avoir Q.

1.2.5 Négation d'une implication

Propriété 1.2.5

La négation de l'assertion $P \implies Q$ est :

$$\overline{(P \implies Q)} \iff (P \wedge \overline{Q})$$

Remarque 3
L'implication $P \implies Q$ est fausse dès que P est vraie sans que Q le soit.

1.2.6 Réciproque et équivalence

Définition 1.2.5
La **réciproque** de l'implication $P \implies Q$ est l'assertion $Q \implies P$.

Remarque 4
La vérité de $P \implies Q$ n'entraîne pas celle de sa réciproque $Q \implies P$.

Définition 1.2.6
Soient P et Q deux assertions. L'équivalence $P \iff Q$ est définie par la double implication :

$$(P \iff Q) \iff [(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)]$$

On lit « P est équivalent à Q » (ou P si et seulement si Q).

Propriété 1.2.6
L'assertion $P \iff Q$ est vraie si et seulement si P et Q ont la **même valeur de vérité** (soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses).

Exemple 4
Pour un réel x, considérons l'assertion :

$$(x+1=3) \iff (x=2)$$

Cette équivalence est vraie car :

i) Si $x=2$, alors $2+1=3$ est vrai ($Q \implies P$).

ii) Si $x+1=3$, alors on a forcément $x=2$ ($P \implies Q$).

1.2.7 Contraposée d'une implication

Définition 1.2.7
Soient P et Q deux assertions. On appelle **contraposée** de l'implication $P \implies Q$ l'assertion suivante :

$$\overline{Q} \implies \overline{P}$$

Elle correspond à l'implication allant de la négation de la conclusion vers la négation de l'hypothèse.

1.3 Quantificateurs

1.3.1 Quantificateurs universel et existentiel

Définition 1.3.1
Soit $P(x)$ une assertion définie sur un ensemble E.

i) **Universel ($\forall$) :** « Pour tout ».

$$\forall x \in E,\ P(x)$$

ii) **Existentiel ($\exists$) :** « Il existe ».

$$\exists x \in E,\ P(x)$$

Note : L'ajout d'un quantificateur rend la variable x **liée** (ou muette).

Propriété 1.3.1 – Négation des quantificateurs
La négation inverse le quantificateur et nie l'assertion :

$$\overline{(\forall x \in E, P(x))} \iff \exists x \in E, \overline{P(x)}$$
$$\overline{(\exists x \in E, P(x))} \iff \forall x \in E, \overline{P(x)}$$

Règle : Le $\forall$ devient $\exists$, le $\exists$ devient $\forall$, et on nie l'assertion $P(x)$.

1.4 Méthodes de raisonnement

1.4.1 Raisonnement direct (déduction)

Pour démontrer que l'implication $P \implies Q$ est vraie :

i) On **suppose** que P est vraie (c'est l'hypothèse).

ii) On **montre** qu'alors Q est vraie (par des déductions logiques).

Exemple 5
Montrons que : « Si n est un entier pair, alors n^2 est pair ».

i) **Hypothèse (P est vraie) :** Soit n un entier pair. On peut donc écrire $n = 2k$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).

ii) **Déduction :** Élevons n au carré :

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

iii) **Conclusion (Q est vraie) :** n^2 s'écrit sous la forme $2 \times$ (entier), donc n^2 est pair.

1.4.2 Raisonnement par disjonction de cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les x d'un ensemble E, on peut diviser E en plusieurs parties (cas) couvrant la totalité de l'ensemble. Si l'on montre que l'assertion est vraie pour :

i) les $x \in A$,

ii) et les $x \notin A$ (le complémentaire),

alors l'assertion est vraie pour tout x dans E.

Exemple 6

Montrons que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, le nombre $n(n+1)$ est pair. Considérons deux cas selon la parité de n :

i) **1er cas : n est pair.** Il existe un entier k tel que $n = 2k$.

$$n(n+1) = 2k(2k+1) = 2 \times [k(2k+1)]$$

Le résultat est un multiple de 2, donc pair.

ii) **2e cas : n est impair.** Il existe un entier k tel que $n = 2k+1$.

$$n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = (2k+1) \times 2(k+1) = 2 \times [(2k+1)(k+1)]$$

Le résultat est aussi un multiple de 2, donc pair.

Conclusion : Dans tous les cas, $n(n+1)$ est pair.

1.4.3 Raisonnement par contraposition

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence logique suivante :

$$(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P)$$

Donc, pour démontrer que l'assertion « $P \implies Q$ » est vraie, il suffit de montrer que « si Q est fausse, alors P est fausse ».

Exemple 7

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons l'assertion suivante :

$$\text{« Si } n^2 \text{ est pair, alors } n \text{ est pair. »}$$

Ici, démontrer le sens direct est difficile (il faudrait utiliser des racines carrées). Utilisons la contraposée :

i) **Hypothèse ($\neg Q$) :** Supposons que n n'est pas pair (donc n est **impair**).

ii) **But ($\neg P$) :** Montrons que n^2 est impair.

Alors, puisque n est impair, il existe un entier k tel que $n = 2k+1$. Élevons n au carré :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

On obtient une forme $2K+1$ (avec $K = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$). Donc n^2 est impair.
Conclusion : Nous avons montré que $(\neg Q \implies \neg P)$ est vraie. Par contraposition, l'assertion initiale $(P \implies Q)$ est vraie.

1.4.4 Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une implication « $P \implies Q$ » est vraie par l'absurde :

i) On suppose que P est vraie **ET** que Q est fausse (c'est-à-dire $\neg Q$).

ii) On cherche une contradiction logique (soit avec l'hypothèse P, soit avec une vérité établie).

iii) On en déduit que l'hypothèse de départ ($\neg Q$) est fausse, donc Q est vraie.

Exemple 8

Soient r un nombre rationnel ($r \in \mathbb{Q}$) et x un nombre irrationnel ($x \notin \mathbb{Q}$). Montrons l'implication suivante :

$$\text{« Si } r \in \mathbb{Q} \text{ et } x \notin \mathbb{Q}, \text{ alors } r + x \notin \mathbb{Q}. \text{ »}$$

Nous allons raisonner par l'absurde.

i) **Hypothèses :** On suppose que r est rationnel et x est irrationnel (P vraie).

ii) **Supposition absurde :** On suppose que la conclusion est fausse, c'est-à-dire que $r + x$ est **rationnel** (Q fausse). Appelons ce nombre s ($s \in \mathbb{Q}$).

On a donc l'égalité : $r + x = s$. On peut isoler x :

$$x = s - r$$

Or, la différence de deux nombres rationnels est rationnelle. Puisque $s \in \mathbb{Q}$ et $r \in \mathbb{Q}$, alors $(s - r) \in \mathbb{Q}$. On en déduit que $x \in \mathbb{Q}$.
Contradiction : Ceci contredit notre hypothèse initiale selon laquelle x est irrationnel ($x \notin \mathbb{Q}$). Notre supposition était donc fausse. **Conclusion :** $r + x$ est bien irrationnel.

1.4.5 Raisonnement par contre-exemple

i) Pour montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E, P(x)$ » est **vraie**, il faut prouver que $P(x)$ est vraie pour **tous** les x de E (démonstration générale).

ii) Par contre, pour montrer que cette assertion est **fausse**, il suffit de trouver **un seul** élément $x_0 \in E$ tel que $P(x_0)$ soit fausse.

Ce raisonnement repose sur la règle de négation du quantificateur universel :

$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \iff \exists x \in E, \neg P(x)$$

Cet élément x_0 est appelé un **contre-exemple**.

Exemple 9

Considérons l'assertion suivante :

$$\text{« Pour tout réel } x, \text{ on a } x^2 > 0. \text{ »}$$

Cette assertion s'écrit formellement : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$.
Est-elle vraie ? Non. Pour le prouver, donnons un **contre-exemple** :

i) Prenons $x = 0$.

ii) Calculons le carré : $0^2 = 0$.

iii) L'inégalité $0 > 0$ est fausse (car c'est une inégalité stricte).

L'existence de ce seul cas ($x = 0$) suffit pour affirmer que l'assertion générale est fausse.

1.5 Raisonnement par récurrence

1.5.1 Principe de récurrence simple

Théorème 1.5.1 – Principe de récurrence

Soit $P(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$.
S'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

i) **Initialisation :** $P(n_0)$ est vraie.

ii) **Hérédité :** Pour tout entier $n \geq n_0$,

$$P(n) \implies P(n+1)$$

Alors, pour tout entier $n \geq n_0$, l'assertion $P(n)$ est vraie.

Démonstration. **Idée clé :** On se ramène au cas standard (commençant à 0) par un décalage d'indice.

On rappelle que l'ensemble $\mathbb{N}$ est défini comme le plus petit ensemble contenant 0 et stable par l'opération « successeur » ($n \mapsto n+1$).

Soit $P(n)$ une propriété définie pour $n \geq n_0$. Définissons une nouvelle propriété $Q(k)$ pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}$ par :

$$Q(k) \iff P(n_0 + k)$$

On vérifie alors les conditions sur Q :

i) **Initialisation :** Comme $P(n_0)$ est vraie, alors $Q(0)$ est vraie.

ii) **Hérédité :** L'hérédité de P implique celle de Q.

$$\forall k \geq 0, \quad Q(k) \implies Q(k+1)$$

Conclusion : D'après la définition fondamentale de $\mathbb{N}$, la propriété $Q(k)$ est vraie pour tout entier k. Par équivalence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$. ■

1.5.2 Récurrence à deux pas (double)

Propriété 1.5.1

Lorsqu'on a besoin de deux prédécesseurs pour avancer, on utilise la récurrence à deux pas. Soit $P(n)$ une assertion dépendant de n. Si :

i) **Initialisation double :** $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies.

ii) **Hérédité :** Pour tout $n \geq n_0$, $[P(n)$ et $P(n+1)] \implies P(n+2)$.

Alors, pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Démonstration. **Idée de la démonstration.** On se ramène à une récurrence simple en définissant une nouvelle propriété $Q(n)$:

$$Q(n) \iff (P(n) \wedge P(n+1))$$

Si l'hérédité à deux pas est vraie, alors $Q(n) \implies Q(n+1)$. Comme $Q(n_0)$ est vraie (initialisation double), le principe de récurrence simple s'applique.

■

Exemple 10

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$$

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n$.
Soit $P(n)$ la propriété : « $u_n = 2^n$ ».

i) **Initialisation (double) :**
   i) Pour $n = 0$: $u_0 = 1 = 2^0$.
   ii) Pour $n = 1$: $u_1 = 2 = 2^1$.

ii) **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies. On a donc pour hypothèses : $u_n = 2^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}$.
Montrons que $u_{n+2} = 2^{n+2}$.
D'après la définition de la suite :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$$

En utilisant les hypothèses de récurrence :

$$u_{n+2} = 2^{n+1} + 2(2^n)$$

On sait que $2(2^n) = 2^{n+1}$, donc :

$$u_{n+2} = 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2 \times 2^{n+1} = 2^{n+2}$$

La propriété est donc héréditaire.

iii) **Conclusion :** D'après le principe de récurrence à deux pas, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n$.

1.5.3 Récurrence forte

On utilise la récurrence forte lorsque, pour établir la propriété au rang $n+1$, il ne suffit pas de connaître le rang n, mais il faut utiliser **tous** les rangs précédents $(n_0, n_0+1, \ldots, n)$.

Propriété 1.5.2

Soit $P(n)$ une assertion. Si :

i) **Initialisation :** $P(n_0)$ est vraie.

ii) **Hérédité forte :** Pour tout entier $n \geq n_0$,

$$(P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \cdots \wedge P(n)) \implies P(n+1)$$

Alors, pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Démonstration. L'idée est de se ramener à une récurrence simple. Posons une nouvelle propriété cumulative $Q(n)$:

$$Q(n) \iff \Big[P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \cdots \wedge P(n)\Big]$$

L'hypothèse d'hérédité forte signifie exactement que $Q(n) \implies P(n+1)$. Or, si $Q(n)$ est vraie et $P(n+1)$ est vraie, alors $Q(n+1)$ devient vraie. On a donc bien $Q(n) \implies Q(n+1)$. D'après le principe de récurrence simple, $Q(n)$ est vraie pour tout n, ce qui implique que $P(n)$ l'est aussi. ■

Exemple 11

Tout entier naturel $n \geq 2$ admet au moins un diviseur premier.
Soit $P(n)$ la propriété : « n admet un diviseur premier ».

i) **Initialisation ($n = 2$) :** L'entier 2 est un nombre premier. Il est son propre diviseur premier. Donc $P(2)$ est vraie.

ii) **Hérédité (Forte) :** Soit $n \geq 2$. **Hypothèse de récurrence forte :** Supposons que pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq n$, la propriété $P(k)$ est vraie (c'est-à-dire que tout entier entre 2 et n a un diviseur premier).

Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

Considérons l'entier $n+1$. Deux cas sont possibles :

i) **Cas 1 : $n+1$ est premier.** Alors $n+1$ admet un diviseur premier (lui-même). La propriété est vraie.

ii) **Cas 2 : $n+1$ n'est pas premier (il est composé).** Alors il existe deux entiers a et b tels que $n+1 = a \times b$, avec $2 \leq a \leq n$ et $2 \leq b \leq n$.

Puisque $2 \leq a \leq n$, on peut appliquer notre **hypothèse de récurrence forte** à l'entier a. Il existe donc un nombre premier p qui divise a.

Or, si p divise a et a divise $n+1$, alors par transitivité, p divise $n+1$. Donc $n+1$ admet bien un diviseur premier (p).

Dans les deux cas, $P(n+1)$ est vraie.

iii) **Conclusion :** D'après le principe de récurrence forte, tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier.

Références bibliographiques

[1] Daniel J. Velleman, *How to Prove It : A Structured Approach*, 3e édition, Cambridge University Press, 2019.

[2] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, 8e édition, McGraw-Hill, 2019.