UNIVERSITÉ MOHAMMED V

FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT

Département de Mathématiques

FORMATION UNIVERSITAIRE

Licence – Sciences Mathématiques

Algèbre I

CHAPITRE 2

Ensembles et applications

Relations d'équivalence, relations d'ordre et applications

SUPPORT DE COURS

Prof. Mohamed Najib LAATABI

najib.laatabi@um5r.ac.ma

mohamednajiblaatabi.com

Toute remarque ou suggestion est la bienvenue. Si vous constatez une erreur dans ce document, merci de bien vouloir la signaler.

Année universitaire • **2026–2027**

Sommaire du chapitre

Notations et symboles **ii**

2 Ensembles, applications et relations binaires **1**
2.1 Ensembles, sous-ensembles, éléments . . . 1
2.2 Ensemble des parties . . . 3
2.3 Opérateurs ensemblistes . . . 4
2.3.1 Complémentaire . . . 4
2.3.2 Réunion . . . 4
2.3.3 Intersection . . . 5
2.3.4 Propriétés des opérateurs ensemblistes . . . 6
2.3.5 Autres définitions . . . 7
2.4 Produit cartésien . . . 8
2.5 Relations binaires . . . 9
2.5.1 Définition et représentation . . . 9
2.5.2 Propriétés fondamentales . . . 9
2.6 Relations d'équivalence . . . 10
2.6.1 Définition et premiers exemples . . . 10
2.6.2 Classes d'équivalence et ensemble quotient . . . 11
2.6.3 Lien entre équivalences et partitions . . . 11
2.7 Relations d'ordre . . . 12
2.7.1 Ordre partiel, ordre total et ordre strict . . . 12
2.7.2 Ordre produit et ordre lexicographique . . . 13
2.7.3 Majorants, minorants, maximum et minimum . . . 13
2.7.4 Borne supérieure et borne inférieure . . . 14
2.7.5 Éléments minimaux et maximaux . . . 15
2.8 Applications . . . 16
2.8.1 Définition, graphe et restriction . . . 16
2.8.2 Image directe et image réciproque . . . 17
2.8.3 Injection, surjection et bijection . . . 18
2.8.4 Composition des applications . . . 19
2.8.5 Bijection réciproque et inverses à un côté . . . 20
2.8.6 Une équivalence associée à une application . . . 21
2.9 Cardinal et dénombrement . . . 22
2.9.1 Ensembles finis et comparaison des cardinaux . . . 22
2.9.2 Formules de dénombrement . . . 22
2.9.3 Ensembles équipotents et dénombrables . . . 23

Références bibliographiques **25**

Notations et symboles

Symbole	Signification
Logique et ensembles usuels	
$\mathbb{N},\ \mathbb{N}^*$	Entiers naturels (avec 0) et entiers naturels strictement positifs
$\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}^*$	Entiers relatifs et entiers relatifs non nuls
$\mathbb{Q},\ \mathbb{R},\ \mathbb{C}$	Rationnels, réels et complexes
$\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}^*$	Réels positifs ou nuls ; réels non nuls
$P \implies Q,\ P \iff Q$	Implication ; équivalence logique
$\neg P,\ P \wedge Q,\ P \vee Q$	Négation ; conjonction ; disjonction inclusive
$\forall,\ \exists,\ \exists!$	Pour tout ; il existe ; il existe un unique
Opérations ensemblistes	
$\in,\ \notin$	Appartient ; n'appartient pas
$\emptyset,\ \{a\}$	Ensemble vide ; singleton d'élément a
$A \subseteq E,\ A \subsetneq E$	Inclusion au sens large ; inclusion stricte
$\mathcal{P}(E)$	Ensemble des parties de E
$\mathcal{F}(\mathbb{N})$	Ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$
$E \setminus A,\ \complement_E(A)$	Complémentaire de A dans E
$\overline{A}$	Complémentaire de A, si l'ensemble ambiant est fixé
$A \cup B,\ A \cap B$	Réunion ; intersection
$A \setminus B,\ A \Delta B$	Différence ; différence symétrique
$\bigcup_{i\in I} A_i,\ \bigcap_{i\in I} A_i$	Réunion et intersection d'une famille indexée par I
$E \times F,\ E^n$	Produit cartésien ; produit de n copies de E
$[\![a, b]\!]$	Ensemble des entiers compris entre a et b
$\lvert E\rvert,\ \mathrm{card}(E)$	Cardinal de l'ensemble E
Relations, équivalences et ordres	
$x \mathcal{R} y,\ G_{\mathcal{R}}$	Éléments en relation ; graphe de la relation
$x \mathcal{R} y$	Éléments équivalents
$[x],\ \mathrm{cl}(x),\ \overline{x}$	Classe d'équivalence de x (selon le contexte)
$E/\mathcal{R},\ E/\mathcal{R}$	Ensemble quotient par une relation d'équivalence
$\pi : E \to E/\mathcal{R}$	Projection canonique $x \mapsto [x]$
$\preccurlyeq,\ \prec$	Relation d'ordre ; ordre strict associé
$\min A,\ \max A$	Plus petit élément ; plus grand élément
$\inf_E A,\ \sup_E A$	Borne inférieure ; borne supérieure dans E
$a \mid b$	a divise b

Symbole	Signification (suite)
Applications et indicatrices	
$f : E \to F,\ x \mapsto f(x)$	Application et image d'un élément
$G_f,\ \mathrm{Im}\, f = f(E)$	Graphe ; image de l'application
$f_{\|A}$	Restriction de f à A
$f(A),\ f^{-1}(B)$	Image directe de A ; image réciproque de B
$f^{-1}(\{y\})$	Fibre de f au-dessus de y
$g \circ f,\ \mathrm{id}_E$	Composition ; identité de E
$f^{-1} : F \to E$	Bijection réciproque, lorsque f est bijective
F^E	Ensemble des applications de E dans F
$\lfloor x \rfloor$	Partie entière de x (plus grand entier inférieur ou égal à x)
$n!$	Factorielle : $1 \times 2 \times \cdots \times n$, avec $0! = 1$

Chapitre

2 Ensembles, applications et relations binaires

Ce chapitre étudie les ensembles et leurs opérations, puis les relations binaires et les applications. Les relations d'équivalence permettent de regrouper les objets en classes ; les relations d'ordre permettent de les comparer. Les compléments sur les cardinaux.

Conventions. On pose $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Le symbole $A \subseteq B$ autorise l'égalité ; $A \subsetneq B$ désigne une inclusion stricte.

2.1 Ensembles, sous-ensembles, éléments

Définition 2.1.1 – Ensemble et élément

Soit E un ensemble, et x un élément de E ; on note $x \in E$ et on lit "x appartient à E". Un ensemble est défini à partir de ses éléments : deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments.

i) L'ensemble contenant les éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$ peut s'écrire à l'aide de ses éléments entre accolades : $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

ii) Le singleton $\{a\}$ est l'ensemble contenant pour seul élément a.

iii) L'ensemble ne contenant aucun élément est l'ensemble vide ; on le note $\emptyset$.

Remarque 1 – Appartenance et ensembles usuels

$\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sont des ensembles.

i) $x \notin A$ est la négation de $x \in A$; il signifie "x n'est pas un élément de A".

ii) $A \ni x$ est équivalent à $x \in A$ et se lit "A contient l'élément x".

Définition 2.1.2 – Inclusion

Si A et E sont deux ensembles, et si tout élément de A est aussi élément de E, autrement dit :

$$x \in A \implies x \in E$$

on dit que A est un **sous-ensemble** de E, ou une **partie** de E, ou que A est **inclus** dans E. On note :

$$A \subseteq E$$

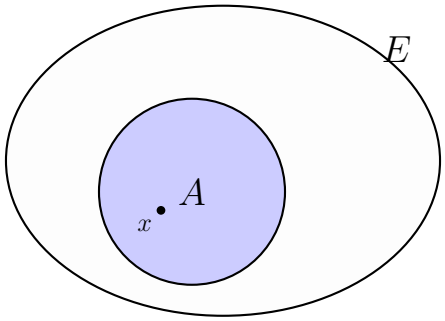


Illustration de $A \subseteq E$: tout élément de A est dans E

FIGURE 2.1 – Diagramme de Venn illustrant l'inclusion $A \subseteq E$

Remarque 2 – Une chaîne d'inclusions
L'ensemble vide $\emptyset$ est inclus dans tout autre ensemble :

$$\emptyset \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

Propriété 2.1.1 – Propriétés de l'inclusion

i) $\emptyset \subseteq E$.
ii) Si $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$ alors $A \subseteq C$ (Transitivité).
iii) $A = B$ si et seulement si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.

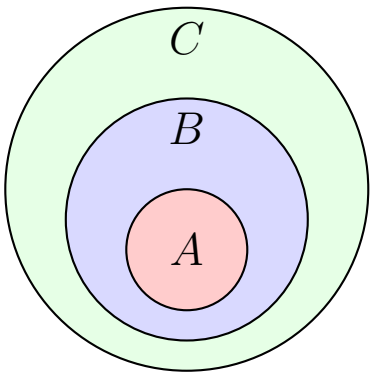


FIGURE 2.2 – Transitivité :
$A \subseteq B$ et $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

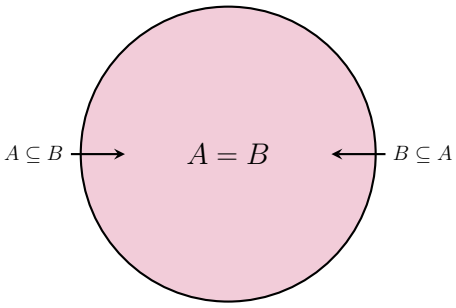


FIGURE 2.3 – Égalité :
$A \subseteq B$ et $B \subseteq A \iff A = B$

Démonstration. Pour montrer que deux ensembles sont égaux $A = B$

i) Dans les cas simples, on procède par équivalence en montrant que $x \in A \iff x \in B$.
ii) Dans tous les autres cas, on montre les deux inclusions $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$. ■

Définition 2.1.3 – Définition en compréhension
Si E est un ensemble, et si $P(x)$ est une assertion portant sur $x \in E$, alors :

$$A = \{x \in E \mid P(x)\}$$

est le sous-ensemble de E dont les éléments sont tous les éléments de E pour lesquels $P(x)$ est vraie.

Exemple 1 – Ensembles définis par une propriété

i) $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

ii) $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}^*, x = \frac{p}{q}\}$

Exemple 2 – Intervalles

Si a et b sont deux réels $(a < b)$, on note :

i) $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

ii) $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

iii) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

iv) $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Si $a \leq b$ sont deux entiers relatifs, on note l'intervalle d'entiers :

$$[\![a, b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\} = \{a, (a+1), \ldots, (b-1), b\}$$

Définition 2.1.4 – Ensemble décrit par une application

Lorsque f est une fonction définie sur E, on peut aussi définir l'ensemble des images par f des éléments de E :

$$\{f(x) \mid x \in E\}$$

Définition 2.1.5 – Dilatation et translation

On peut aussi définir certaines parties de $\mathbb{R}$ à l'aide des opérations usuelles. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$aA = \{a \times z \mid z \in A\} \quad ; \quad a + A = \{a + z \mid z \in A\}$$

Exemple 3 – Multiples et translation

i) $\pi\mathbb{Z} = \{k \times \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

ii) $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} = \{\frac{\pi}{2} + k \times \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

2.2 Ensemble des parties

Définition 2.2.1 – Ensemble des parties

Soit E un ensemble ; $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble dont les éléments sont les parties de E.

Remarque 3 – Des ensembles comme éléments

$\mathcal{P}(E)$ est un ensemble de parties de E : ses éléments sont eux-mêmes des ensembles. Il contient toujours $\emptyset$ et E comme éléments.

Propriété 2.2.1 – Inclusion et appartenance

$$A \subseteq E \iff A \in \mathcal{P}(E)$$

Exemple 4 – Calcul de l'ensemble des parties

i) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

ii) Si $E = \{0, 1\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

Remarque 4 – Ensemble vide et singleton

Attention : $\{\emptyset\} \neq \emptyset$. Le premier contient un élément (l'ensemble vide), le second aucun.

2.3 Opérateurs ensemblistes

2.3.1 Complémentaire

Définition 2.3.1 – Complémentaire

Soit E un ensemble et A une partie de E. Le complémentaire de A dans E est :

$$\complement_E(A) = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté on le note aussi $\overline{A}$.

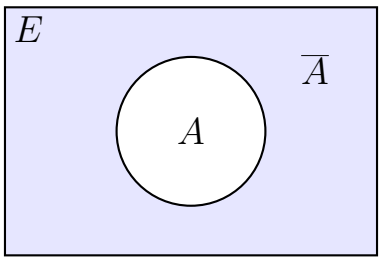


FIGURE 2.4 – Représentation du complémentaire $\complement_E(A)$

Propriété 2.3.1 – Complémentaire du complémentaire

$$\overline{\overline{A}} = A$$

2.3.2 Réunion

Définition 2.3.2 – Réunion

Soient E un ensemble, et A et B deux parties de E. La réunion de A et B est l'ensemble :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

C'est une partie de E.

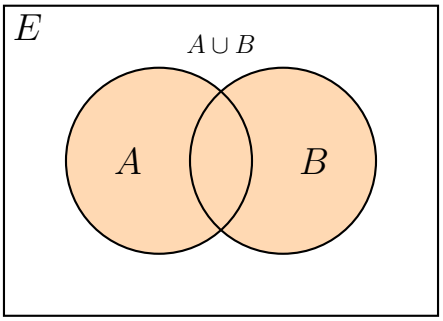


FIGURE 2.5 – Représentation de la réunion $A \cup B$

Propriété 2.3.2 – Propriétés de la réunion

La réunion vérifie les propriétés suivantes :

i) $A \cup B = B \cup A$ (commutativité).

ii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativité).

iii) $A \cup \emptyset = A$.

iv) Si $A \subseteq B$ alors $A \cup B = B$.

v) $A \subseteq A \cup B$ et $B \subseteq A \cup B$.

vi) $(A \subseteq C \text{ et } B \subseteq C) \implies A \cup B \subseteq C$.

Définition 2.3.3 – Réunion généralisée

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des parties de E :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in [\![1, n]\!], x \in A_i\} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

Plus généralement, soit I un ensemble d'indices et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$$

2.3.3 Intersection

Définition 2.3.4 – Intersection

Soient E un ensemble, et A et B deux parties de E. L'intersection de A et B est l'ensemble :

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

C'est une partie de E, mais aussi de A et de B.

Propriété 2.3.3 – Propriétés de l'intersection

L'intersection vérifie les propriétés suivantes :

i) $A \cap B = B \cap A$ (commutativité).

ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativité).

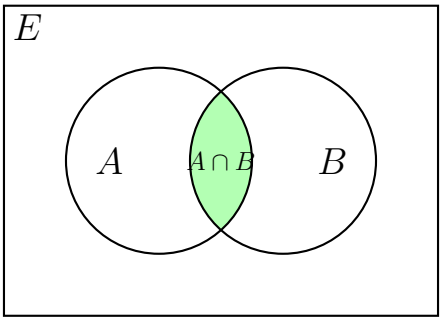


FIGURE 2.6 – Représentation de l'intersection $A \cap B$

iii) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

iv) Si $A \subseteq B$ alors $A \cap B = A$.

v) $A \cap B \subseteq A$ et $A \cap B \subseteq B$.

vi) $(C \subseteq A \text{ et } C \subseteq B) \implies C \subseteq A \cap B$.

Définition 2.3.5 – Intersection généralisée

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des parties de E :

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in [\![1, n]\!], x \in A_i\} = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

Plus généralement, soit I un ensemble d'indices et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$$

2.3.4 Propriétés des opérateurs ensemblistes

Propriété 2.3.4 – Distributivité

i) De $\cap$ sur $\cup$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ii) De $\cup$ sur $\cap$: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Propriété 2.3.5 – Lois de Morgan

Soient A et B deux parties de E.

i) $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

ii) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

2.3.5 Autres définitions

Définition 2.3.6 – Différence ensembliste

Soient A et B deux parties de E ; on note $A \setminus B$ (lire "A privé de B") :

$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \complement_E B = A \cap \overline{B}$$

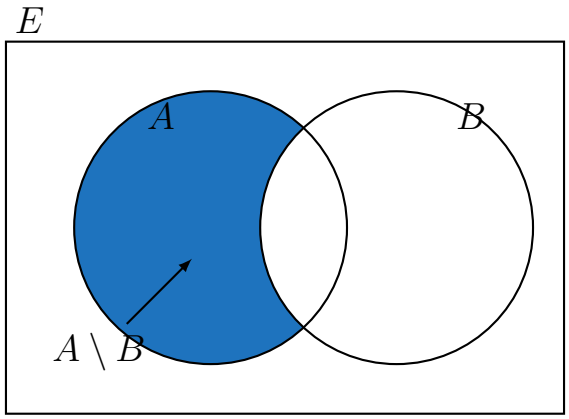


FIGURE 2.7 – Illustration de $A \setminus B$ en bleu

Définition 2.3.7 – Différence symétrique

Soient A et B deux parties de E. La différence symétrique de A et B, notée $A\Delta B$, est l'ensemble défini par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

On peut aussi l'écrire comme la réunion des différences :

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

C'est l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B, mais pas aux deux simultanément.

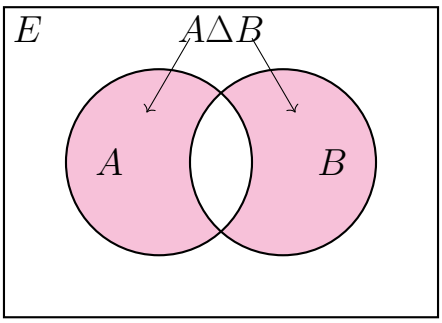


FIGURE 2.8 – Représentation de la différence symétrique $A\Delta B$

Définition 2.3.8 – Partition

Une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties d'un ensemble E est une **partition** de E si :

i) chaque partie est non vide : $A_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$;

ii) les parties recouvrent E : $\bigcup_{i\in I} A_i = E$;

iii) elles sont deux à deux disjointes : $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$.

Ainsi, tout élément de E appartient à une et une seule partie de la famille.

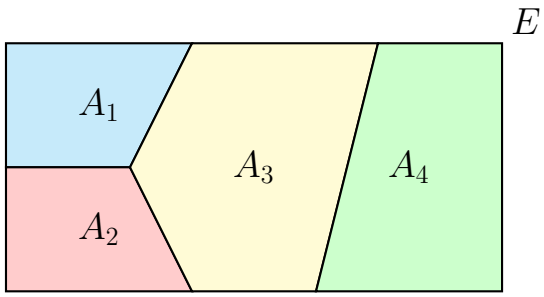


FIGURE 2.9 – Partition de l'ensemble E en 4 sous-ensembles

Exemple 5 – Partition en deux parties

Si $\emptyset \neq A \subsetneq E$, alors A et $\overline{A}$ forment une partition de E : ces deux parties sont non vides, leur réunion vaut E et leur intersection est vide. Si $A = \emptyset$ ou $A = E$, on doit supprimer la partie vide.

2.4 Produit cartésien

Définition 2.4.1 – Produit de deux ensembles

Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F est l'ensemble des couples d'éléments de E et de F :

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Exemple 6 – Un produit fini

$[\![0, 1]\!] \times [\![1, 2]\!] = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$

Remarque 5 – Interprétation géométrique

Ce nom de produit cartésien provient du fait que depuis Descartes, on représente des points du plan à l'aide d'un repère orthonormé par des couples de réels, c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Définition 2.4.2 – Produit de plusieurs ensembles

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$, n ensembles. Le produit cartésien de $E_1, E_2, \ldots, E_n$ est :

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in E_i\}$$

Ses éléments sont appelés des n-uplets.

2.5 Relations binaires

2.5.1 Définition et représentation

Définition 2.5.1 – Relation binaire

Soient E et F deux ensembles. Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ de E vers F est définie par une partie $G_{\mathcal{R}}$ de $E \times F$, appelée son **graphe**. Pour $x \in E$ et $y \in F$, on écrit

$$x\mathcal{R}y \iff (x, y) \in G_{\mathcal{R}}.$$

Lorsque $E = F$, on parle d'une relation binaire **sur** E.

Exemple 7 – Trois relations usuelles

1. Sur $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \iff x \leq y$.
2. Sur $\mathcal{P}(E)$, $A\mathcal{R}B \iff A \subseteq B$.
3. Sur $\mathbb{Z}$, $a\mathcal{R}b \iff a \mid b$, où $a \mid b$ signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ak$.

2.5.2 Propriétés fondamentales

Définition 2.5.2 – Réflexivité, symétrie, antisymétrie et transitivité

Une relation $\mathcal{R}$ sur E est :

i) **réflexive** si $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$;

ii) **symétrique** si $\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$;

iii) **antisymétrique** si $\forall x, y \in E$,

$$(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies x = y;$$

iv) **transitive** si $\forall x, y, z \in E$,

$$(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z.$$

Remarque 6 – Symétrie et antisymétrie

L'antisymétrie n'est pas la négation de la symétrie. La relation d'égalité est à la fois symétrique et antisymétrique. Une relation peut aussi n'avoir aucune de ces deux propriétés.

Exemple 8 – Une relation non transitive

Sur $E = \{2, 3, 4, \ldots\}$, posons $a\mathcal{R}b$ si a et b ont un diviseur premier commun. Cette relation est réflexive (tout entier $a \geq 2$ a un diviseur premier) et symétrique. Elle n'est pas transitive : $2\mathcal{R}6$ et $6\mathcal{R}15$, mais 2 et 15 n'ont aucun diviseur premier commun.

Exemple 9 – Une transitivité par implication vide

Sur $\mathbb{N}$, considérons $G_{\mathcal{R}} = \{(2k+1, 2k) : k \in \mathbb{N}\}$. La relation n'est ni réflexive ni symétrique. Elle est transitive : il est impossible d'avoir simultanément $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, car y devrait être pair et impair. Elle est également antisymétrique pour la même raison.

Relation	Réflexive	Symétrique	Antisym.	Transitive
$=$ sur $\mathbb{R}$	oui	oui	oui	oui
$\leq$ sur $\mathbb{R}$	oui	non	oui	oui
$<$ sur $\mathbb{R}$	non	non	oui	oui
$\mid$ sur $\mathbb{N}^*$	oui	non	oui	oui
$\mid$ sur $\mathbb{Z}^*$	oui	non	non	oui
Même parité sur $\mathbb{Z}$	oui	oui	non	oui

Pour réfuter une propriété, un seul contre-exemple suffit. Pour la démontrer, on travaille avec des éléments arbitraires de l'ensemble.

2.6 Relations d'équivalence

2.6.1 Définition et premiers exemples

Définition 2.6.1 – Relation d'équivalence

Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive. On utilise souvent les notations $x\mathcal{R}y$ ou $x \equiv y$.

Exemple 10 – Différence entière

Sur $\mathbb{R}$, la relation $x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbb{Z}$ est une équivalence : $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$, l'opposé d'un entier est entier et la somme de deux entiers est entière. En revanche, $x\mathcal{S}y \iff y - x \in \mathbb{N}$ n'est pas symétrique, puisque $0\mathcal{S}1$ mais $1 \not\mathcal{S}0$.

Exemple 11 – Même cardinal

Sur l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$, la relation $A\mathcal{R}B \iff \text{card}(A) = \text{card}(B)$ est une équivalence. Les trois propriétés résultent de celles de l'égalité des entiers.

2.6.2 Classes d'équivalence et ensemble quotient

Définition 2.6.2 – Classe et quotient

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Pour $x \in E$, sa **classe d'équivalence** est

$$[x] = \{y \in E : y\mathcal{R}x\}.$$

On la note aussi $\mathrm{cl}(x)$ ou $\overline{x}$. Un élément de $[x]$ est un **représentant** de cette classe. L'**ensemble quotient** est

$$E/\mathcal{R} = \{[x] : x \in E\}.$$

Ses éléments sont des classes, donc des parties de E.

Proposition 2.6.1 – Égalité ou disjonction des classes

Pour tous $x, y \in E$:

$$x \in [x], \qquad x\mathcal{R}y \iff [x] = [y],$$

et deux classes sont soit égales, soit disjointes.

Démonstration. La réflexivité donne $x \in [x]$. Supposons $x\mathcal{R}y$. Si $z \in [x]$, alors $z\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{R}y$; la transitivité donne $z\mathcal{R}y$, donc $[x] \subseteq [y]$. La symétrie donne l'inclusion inverse. Réciproquement, si $[x] = [y]$, alors $x \in [y]$, donc $x\mathcal{R}y$.

Si $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, prenons z dans cette intersection. On a $z\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}y$, donc $x\mathcal{R}y$ par symétrie et transitivité. Ainsi $[x] = [y]$. ■

Exemple 12 – Classes dans $\mathbb{R}$ et fractions

Pour $x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbb{Z}$, on a $[x] = x + \mathbb{Z}$. Chaque classe possède un unique représentant dans $[0, 1[$: l'existence découle de $x = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)$; l'unicité vient du fait que le seul entier dans $]-1, 1[$ est 0.
Sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, la relation

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff ad = bc$$

est aussi une équivalence. Ses classes correspondent aux fractions de même valeur. Le quotient s'identifie à $\mathbb{Q}$ par $[(a, b)] \mapsto a/b$.

Vérification pour les fractions. La réflexivité et la symétrie sont immédiates. Si $ad = bc$ et $cf = de$, alors $adf = bcf = bde$. Comme $d \neq 0$, la simplification dans $\mathbb{Z}$ donne $af = be$. L'identification au rationnel a/b est bien définie et injective car $a/b = c/d \iff ad = bc$; elle est surjective par définition des rationnels. ■

2.6.3 Lien entre équivalences et partitions

Théorème 2.6.1 – Classes et partitions

Les classes distinctes d'une relation d'équivalence sur un ensemble non vide E constituent une partition de E. Réciproquement, toute partition de E définit une relation d'équivalence dont les classes sont exactement les parties de cette partition.

Démonstration. Toute classe $[x]$ est non vide, car elle contient x. Deux classes distinctes sont disjointes, et tout élément appartient à sa classe. Les classes recouvrent donc E.

Réciproquement, soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition de E. Posons

$$x\mathcal{R}y \iff \exists i \in I, \quad x, y \in A_i.$$

Chaque élément appartient à une partie, donc $\mathcal{R}$ est réflexive. Elle est symétrique par définition. Si $x, y \in A_i$ et $y, z \in A_j$, alors $y \in A_i \cap A_j$, donc $i = j$ et $x, z \in A_i$: elle est transitive. Pour $x \in A_i$, on obtient exactement $[x] = A_i$. ■

Définition 2.6.3 – Projection canonique

L'application $\pi : E \to E/\mathcal{R}$ définie par $\pi(x) = [x]$ est la **projection canonique**. Elle est surjective, puisque toute classe possède un représentant. De plus, $\pi(x) = \pi(y) \iff x\mathcal{R}y$.

Remarque 7 – Définir une application sur un quotient

Une formule $u([x]) = h(x)$ est **bien définie** si elle ne dépend pas du représentant choisi. Il faut vérifier

$$x\mathcal{R}y \implies h(x) = h(y).$$

2.7 Relations d'ordre

2.7.1 Ordre partiel, ordre total et ordre strict

Définition 2.7.1 – Relation d'ordre

Une relation $\preccurlyeq$ sur E est une **relation d'ordre** si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. Le couple $(E, \preccurlyeq)$ est alors un **ensemble ordonné**.
Deux éléments $x, y \in E$ sont **comparables** si $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$. L'ordre est **total** si tous les couples d'éléments sont comparables. Sinon, **l'ordre est partiel**.

Remarque 8 – Terminologie

Pour toute relation d'ordre, les ordres totaux étant alors un cas particulier. Dans certains cours, « partiel » signifie « non total ». Ici, on précisera « non total » lorsqu'il existe des éléments incomparables.

Exemple 13 – Ordre usuel et inclusion

L'ordre usuel $\leq$ est total sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. L'inclusion $\subseteq$ est un ordre sur $\mathcal{P}(E)$: elle est réflexive, transitive, et la double inclusion implique l'égalité. Si E contient deux éléments distincts a, b, les parties $\{a\}$ et $\{b\}$ sont incomparables ; l'ordre n'est donc pas total.

Définition 2.7.2 – Ordre strict associé

À un ordre $\preccurlyeq$ on associe la relation stricte $\prec$ définie par

$$x \prec y \iff x \preccurlyeq y \text{ et } x \neq y.$$

Elle est irréflexive ($x \not\prec x$) et transitive.

Démonstration. L'irréflexivité est immédiate. Si $x \prec y$ et $y \prec z$, alors $x \preccurlyeq z$. L'égalité $x = z$ entraînerait $y \preccurlyeq x$ et $x \preccurlyeq y$, donc $x = y$ par antisymétrie, ce qui est impossible. Ainsi $x \prec z$. ■

2.7.2 Ordre produit et ordre lexicographique

Définition 2.7.3 – Deux ordres sur $\mathbb{R}^2$

L'**ordre produit** est défini par

$$(x_1, x_2) \preccurlyeq_{\mathrm{p}} (y_1, y_2) \iff x_1 \leq y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2.$$

L'**ordre lexicographique** est défini par

$$(x_1, x_2) \preccurlyeq_{\mathrm{lex}} (y_1, y_2) \iff x_1 < y_1 \text{ ou } (x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2).$$

Proposition 2.7.1 – Nature de ces ordres

L'ordre produit est un ordre non total sur $\mathbb{R}^2$. L'ordre lexicographique est un ordre total sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Pour l'ordre produit, les trois propriétés se vérifient coordonnée par coordonnée. Les couples $(0,1)$ et $(1,0)$ sont incomparables.

Pour l'ordre lexicographique, la réflexivité est immédiate. Si $x \preccurlyeq_{\mathrm{lex}} y$ et $y \preccurlyeq_{\mathrm{lex}} x$, alors $x_1 = y_1$, puis $x_2 = y_2$, d'où l'antisymétrie. Si $x \preccurlyeq_{\mathrm{lex}} y \preccurlyeq_{\mathrm{lex}} z$, on a $x_1 \leq y_1 \leq z_1$. Si $x_1 < z_1$, on conclut. Sinon les premières coordonnées sont égales, et $x_2 \leq y_2 \leq z_2$ donne la transitivité. Enfin, on compare d'abord les premières coordonnées et, si elles sont égales, les secondes : tous les couples sont comparables. ■

Remarque 9 – Généralisation

Sur A^n, où $(A, \leq)$ est totalement ordonné, on compare deux n-uplets distincts à leur première coordonnée différente. Cela définit encore un ordre total, appelé ordre lexicographique. Par exemple, $(1,8,9) <_{\mathrm{lex}} (2,0,0)$ et $(1,2,7) <_{\mathrm{lex}} (1,3,0)$.

2.7.3 Majorants, minorants, maximum et minimum

Définition 2.7.4 – Bornes et éléments extrêmes

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et $A \subseteq E$ une partie non vide.

i) $M \in E$ est un **majorant** de A si $\forall a \in A,\ a \preccurlyeq M$.

ii) $m \in E$ est un **minorant** de A si $\forall a \in A,\ m \preccurlyeq a$.

iii) A est **majorée**, **minorée** ou **bornée** si elle admet respectivement un majorant, un minorant, ou les deux.

iv) M est le **plus grand élément** ou **maximum** de A si $M \in A$ et M majore A ; on note $M = \max A$.

v) m est le **plus petit élément** ou **minimum** de A si $m \in A$ et m minore A ; on note $m = \min A$.

Proposition 2.7.2 – Unicité des éléments extrêmes

Lorsqu'ils existent, le minimum et le maximum d'une partie sont uniques.

Démonstration. Si M et M' sont deux maxima de A, alors $M \preccurlyeq M'$ puisque $M \in A$, et $M' \preccurlyeq M$ puisque $M' \in A$. L'antisymétrie donne $M = M'$. La preuve pour le minimum est identique en inversant les inégalités. ■

Exemple 14 – Un majorant n'est pas nécessairement un maximum

Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, pour $A = [0, 1[$, les majorants forment $[1, +\infty[$ et les minorants forment $]-\infty, 0]$. On a $\min A = 0$, mais A n'a pas de maximum : pour tout $a \in A$, le réel $(a+1)/2$ appartient à A et est strictement supérieur à a.

2.7.4 Borne supérieure et borne inférieure

Définition 2.7.5 – Supremum et infimum

La **borne supérieure** $\sup_E A$ est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A dans E. Ainsi $s = \sup_E A$ si

$$\begin{cases} \forall a \in A, \quad a \preccurlyeq s, \\ \forall M \in E, \quad (M \text{ majore } A \implies s \preccurlyeq M). \end{cases}$$

La **borne inférieure** $\inf_E A$ est le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A dans E. Ces bornes, lorsqu'elles existent, sont uniques ; elles appartiennent à E, mais pas nécessairement à A.

Proposition 2.7.3 – Lien avec le maximum et le minimum

Si $\max A$ existe, alors $\sup_E A = \max A$. Réciproquement, si $\sup_E A$ existe et appartient à A, c'est le maximum de A. Les énoncés analogues valent pour $\inf_E A$ et $\min A$.

Démonstration. Un maximum M est un majorant appartenant à A ; tout majorant u vérifie donc $M \preccurlyeq u$. Ainsi M est le plus petit majorant. Réciproquement, une borne supérieure appartenant à A est un majorant dans A, donc un maximum. On raisonne de même pour le minimum. ■

$A \subseteq \mathbb{R}$	$\inf_{\mathbb{R}} A$	$\sup_{\mathbb{R}} A$	$\min A$	$\max A$
$[0, 1[$	0	1	0	n'existe pas
$]-2, 3]$	-2	3	n'existe pas	3
$\{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$	0	1	n'existe pas	1
$\mathbb{N}$	0	n'existe pas	0	n'existe pas

Pour $A = \{1/n : n \geq 1\}$, 0 est un minorant et tout réel $\varepsilon > 0$ est supérieur à $1/n$ pour un entier n assez grand ; aucun réel strictement positif ne peut donc minorer A.

Remarque 10 – L'ensemble ambiant compte

Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide majorée admet une borne supérieure (propriété de complétude, étudiée en analyse). Cette propriété n'est pas vraie dans tout ensemble ordonné. Dans $E = \mathbb{R}^*$, la partie $A =]0, +\infty[$ est minorée, mais ses minorants sont exactement les réels strictement négatifs. Ils n'ont pas de plus grand élément : si $m < 0$, alors $m < m/2 < 0$. Ainsi $\inf_E A$ n'existe pas, alors que $\inf_{\mathbb{R}} A = 0$.

2.7.5 Éléments minimaux et maximaux

Définition 2.7.6 – Minimal et maximal

Pour $a \in A \subseteq E$, on dit que :

i) a est **minimal** dans A si $\forall x \in A,\ x \preccurlyeq a \implies x = a$;

ii) a est **maximal** dans A si $\forall x \in A,\ a \preccurlyeq x \implies x = a$.

Un élément minimal n'a donc aucun élément de A strictement en dessous de lui ; un élément maximal n'en a aucun strictement au-dessus.

Proposition 2.7.4 – Comparaison des notions

Un minimum est l'unique élément minimal ; un maximum est l'unique élément maximal. Dans un ensemble totalement ordonné, tout élément minimal est un minimum et tout élément maximal est un maximum.

Démonstration. Si $m = \min A$, alors $m \preccurlyeq x$ pour tout $x \in A$. Si x est minimal, cette inégalité impose $x = m$. Dans un ordre total, si a est minimal et $x \in A$, alors $a \preccurlyeq x$ ou $x \preccurlyeq a$. Dans le second cas, $x = a$, donc dans tous les cas $a \preccurlyeq x$: a est le minimum. Le raisonnement est analogue pour les maxima. ■

Exemple 15 – Éléments minimaux et maximaux

Soit $A = \{2, 3, 6\}$.

i) **Pour l'ordre usuel $\leq$:**
On a $2 < 3 < 6$. Ainsi,

$$\boxed{\min A = 2 \qquad \text{et} \qquad \max A = 6.}$$

L'élément 2 est l'unique élément minimal et 6 est l'unique élément maximal.

ii) **Pour l'ordre de divisibilité $\mid$:**
On a

$$2 \mid 6, \qquad 3 \mid 6,$$

mais $2 \nmid 3$ et $3 \nmid 2$.
Par conséquent :

i) 2 et 3 sont des éléments minimaux ;

ii) 6 est l'unique élément maximal ;

iii) 6 est le maximum de A ;

iv) A n'admet pas de minimum.

Proposition 2.7.5 – Cas fini

Toute partie finie non vide d'un ensemble ordonné possède au moins un élément minimal et au moins un élément maximal. Si l'ordre est total, elle possède un minimum et un maximum.

Démonstration. Partons de $a_0 \in A$. S'il n'est pas minimal, choisissons $a_1 \prec a_0$, puis recommençons si nécessaire. Les éléments obtenus sont tous distincts ; puisque A est fini, le processus

s'arrête sur un élément minimal. On construit de même un élément maximal. Dans le cas total, on applique la proposition précédente. ■

Exemple 16 – Parties finies et parties propres de $\mathbb{N}$

Dans $(\mathcal{F}(\mathbb{N}), \subseteq)$, $\emptyset$ est le minimum et il n'existe aucun élément maximal : pour toute partie finie A, on peut choisir $n \in \mathbb{N} \setminus A$, et $A \subsetneq A \cup \{n\}$.
Dans $(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\mathbb{N}\}, \subseteq)$, les éléments maximaux sont exactement les ensembles $\mathbb{N} \setminus \{n\}$, $n \in \mathbb{N}$. En effet, ajouter leur unique élément manquant donne $\mathbb{N}$, qui est exclu. Si une partie propre omet au moins deux éléments, on peut en ajouter un tout en restant une partie propre.

2.8 Applications

2.8.1 Définition, graphe et restriction

Définition 2.8.1 – Application

Une **application** $f : E \to F$ associe à tout élément $x \in E$ un unique élément $f(x) \in F$. L'ensemble E est l'**ensemble de départ**, F l'**ensemble d'arrivée**, et $f(x)$ l'**image** de x. Si $f(x) = y$, on dit que x est un **antécédent** de y.

$$f : \begin{cases} E \longrightarrow F, \\ x \longmapsto f(x). \end{cases}$$

Le **graphe** de f est $G_f = \{(x, f(x)) : x \in E\} \subseteq E \times F$.

Une relation binaire de E vers F est donc le graphe d'une application si chaque $x \in E$ est en relation avec *exactement un* élément de F. Une valeur de F peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents.

Remarque 11 – Fonction et application

On appelle parfois « fonction de E vers F » une correspondance définie seulement sur une partie $D_f \subseteq E$. Sa restriction à son domaine de définition est une application $D_f \to F$. Dans ce chapitre, toute écriture $f : E \to F$ désigne une application définie sur tout E.

Exemple 17 – Vérifier qu'une application est bien définie

i) $x \mapsto 1/x$ définit une application $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, mais pas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

ii) $n \mapsto n^2 - 3$ ne définit pas une application $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, puisque l'image de 0 serait $-3 \notin \mathbb{N}$.

iii) La règle « associer à $x \geq 0$ un réel y tel que $y^2 = x$ » n'est pas univoque pour $x > 0$. La règle $x \mapsto \sqrt{x}$ définit en revanche une application $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Définition 2.8.2 – Égalité, identité et restriction

Deux applications $f, g : E \to F$ sont égales si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$. L'**identité** de E est $\mathrm{id}_E : E \to E$, $x \mapsto x$.

Si $A \subseteq E$, la **restriction** de f à A est

$$f_{|A} : A \longrightarrow F, \qquad x \longmapsto f(x).$$

Si $B \subseteq F$ contient $f(E)$, on peut aussi considérer l'application $E \to B$, $x \mapsto f(x)$, appelée **corestriction** à B.

2.8.2 Image directe et image réciproque

Définition 2.8.3 – Images d'une partie
Pour $f : E \to F$, $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$, on définit

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in F : \exists x \in A,\ f(x) = y\},$$
$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}.$$

L'ensemble $f(A)$ est l'**image directe** de A ; $f^{-1}(B)$ est l'**image réciproque** de B. On note $\operatorname{Im} f = f(E)$. L'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est la **fibre** au-dessus de y.

Exemple 18 – L'application carré
Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, on a

$$f([-2,1]) = [0,4], \qquad f^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,2],$$

$$f^{-1}(\{4\}) = \{-2,2\}, \quad f^{-1}(\{0\}) = \{0\}, \quad f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset.$$

L'image réciproque d'un singleton n'est donc pas nécessairement un singleton.

Proposition 2.8.1 – Opérations et image directe
Pour $A, C \subseteq E$:

$$A \subseteq C \implies f(A) \subseteq f(C),$$
$$f(A \cup C) = f(A) \cup f(C),$$
$$f(A \cap C) \subseteq f(A) \cap f(C).$$

La dernière inclusion peut être stricte.

Démonstration. Si $y = f(x)$ avec $x \in A \subseteq C$, alors $y \in f(C)$. De plus, $y \in f(A \cup C)$ équivaut à l'existence d'un antécédent dans A ou dans C, donc à $y \in f(A) \cup f(C)$. Enfin, un antécédent dans $A \cap C$ est à la fois dans A et dans C, d'où l'inclusion.

Pour $f(x) = x^2$, $A = \{-1\}$ et $C = \{1\}$, on a

$$f(A \cap C) = \emptyset,$$

tandis que

$$f(A) \cap f(C) = \{1\}.$$

■

Proposition 2.8.2 – Opérations et image réciproque
Pour $B, D \subseteq F$:

$$\begin{aligned} B \subseteq D &\implies f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(D), \\ f^{-1}(B \cup D) &= f^{-1}(B) \cup f^{-1}(D), \\ f^{-1}(B \cap D) &= f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D), \\ f^{-1}(F \setminus B) &= E \setminus f^{-1}(B), \\ f^{-1}(B \setminus D) &= f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(D). \end{aligned}$$

De plus, $f^{-1}(F) = E$ et $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Démonstration. Il suffit de traduire l'appartenance. Par exemple,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B \cap D) &\iff f(x) \in B \text{ et } f(x) \in D \\ &\iff x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D), \\ x \in f^{-1}(F \setminus B) &\iff f(x) \notin B \iff x \in E \setminus f^{-1}(B). \end{aligned}$$

Le même raisonnement avec « ou » donne la réunion. La monotonie vient de $f(x) \in B \subseteq D$. La différence résulte de l'intersection et du complémentaire. Les deux dernières égalités découlent de $f(x) \in F$ et $f(x) \notin \emptyset$. ■

Proposition 2.8.3 – Aller-retour entre les deux images
Pour $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$:

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)), \qquad f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E) \subseteq B.$$

Démonstration. Si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$, donc $x \in f^{-1}(f(A))$. Ensuite, $y \in f(f^{-1}(B))$ signifie qu'il existe $x \in E$ avec $y = f(x) \in B$, ce qui équivaut à $y \in B \cap f(E)$. ■

2.8.3 Injection, surjection et bijection

Définition 2.8.4 – Trois propriétés fondamentales
Une application $f : E \to F$ est :

i) **injective** si $\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \implies x = x'$;

ii) **surjective** si $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$, c'est-à-dire $f(E) = F$;

iii) **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.

Ainsi, une injection donne *au plus un* antécédent par élément de F, une surjection en donne *au moins un*, et une bijection en donne *exactement un*.

Exemple 19 – Le rôle des ensembles de départ et d'arrivée
La formule $x \mapsto x^2$ donne des applications de nature différente :

Application	Injective ?	Surjective ?
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	non : $f(-1) = f(1)$	non : -1 sans antécédent
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$	non	oui : $\sqrt{y}$ est un antécédent
$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$	oui	non
$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$	oui	oui

Sur $\mathbb{R}_+$, l'égalité $x^2 = (x')^2$ impose $x = x'$; cela justifie les deux dernières lignes.

Exemple 20 – Quelques applications sur les entiers

i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$, est injective mais non surjective, car 0 n'a pas d'antécédent.

ii) $p : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(a,b) \mapsto b$, est surjective car $p(0,b) = b$, mais non injective car $p(0,0) = p(1,0)$.

iii) $u : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $(n,m) \mapsto (n+1, m-1)$, est bijective : l'unique antécédent de (a,b) est $(a-1, b+1)$.

Proposition 2.8.4 – Images et injectivité ou surjectivité

Pour $f : E \to F$:

1. f est injective si et seulement si $f^{-1}(f(A)) = A$ pour toute partie $A \subseteq E$.
2. f est surjective si et seulement si $f(f^{-1}(B)) = B$ pour toute partie $B \subseteq F$.
3. Si f est injective, alors $f(A \cap C) = f(A) \cap f(C)$ pour toutes parties $A, C \subseteq E$.

Démonstration. Si f est injective et $x \in f^{-1}(f(A))$, il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$, donc $x = a \in A$. Pour la réciproque, si $f(x) = f(x')$, alors $x' \in f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$, donc $x' = x$.

La deuxième équivalence résulte de $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$; pour la réciproque, on prend $B = F$.

Enfin, si $y \in f(A) \cap f(C)$, il existe $a \in A$ et $c \in C$ tels que $y = f(a) = f(c)$. L'injectivité donne $a = c \in A \cap C$, donc $y \in f(A \cap C)$. L'autre inclusion a déjà été établie. ■

2.8.4 Composition des applications

Définition 2.8.5 – Composition

Pour $f : E \to F$ et $g : F \to G$, leur **composée** est

$$g \circ f : E \longrightarrow G, \qquad x \longmapsto g(f(x)).$$

Dans $g \circ f$, on applique donc d'abord f, puis g.

Proposition 2.8.5 – Associativité et identité

Pour $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f, \qquad \mathrm{id}_F \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_E .$$

Démonstration. Pour tout $x \in E$, les deux composées de trois applications ont pour valeur $h(g(f(x)))$. De même, $\mathrm{id}_F(f(x)) = f(x) = f(\mathrm{id}_E(x))$. ■

Remarque 12 – La composition n'est pas commutative

Sur $\mathbb{R}$, pour $f(x) = x^2$ et $g(x) = x+1$, on a $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$ et $(f \circ g)(x) = (x+1)^2$. Ces applications diffèrent, par exemple en $x = 1$. Il faut aussi vérifier la compatibilité des domaines pour que chaque composée soit définie.

Proposition 2.8.6 – Composition et propriétés

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
4. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Démonstration. Pour (1), $g(f(x)) = g(f(x'))$ implique $f(x) = f(x')$, puis $x = x'$. Pour (2), étant donné $z \in G$, on trouve $y \in F$ avec $g(y) = z$, puis $x \in E$ avec $f(x) = y$.

Pour (3), $f(x) = f(x')$ entraîne $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, donc $x = x'$. Pour (4), tout $z \in G$ s'écrit $z = g(f(x))$ et a donc un antécédent par g. ■

Exemple 21 – Ce que l'on ne peut pas déduire

Soient $i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $i(x) = x$, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $g(x) = |x|$. Alors $g \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$ est bijective, mais i n'est pas surjective et g n'est pas injective.

2.8.5 Bijection réciproque et inverses à un côté

Définition 2.8.6 – Bijection réciproque

Si $f : E \to F$ est bijective, sa **bijection réciproque** $f^{-1} : F \to E$ associe à $y \in F$ son unique antécédent. Elle vérifie

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F .$$

Remarque 13 – Deux sens de la notation f^{-1}

L'image réciproque $f^{-1}(B)$ d'une partie $B \subseteq F$ existe pour toute application. En revanche, la bijection réciproque $f^{-1} : F \to E$ n'existe que lorsque f est bijective. Pour une bijection, l'image de B par l'application réciproque coïncide avec l'image réciproque de B.

Théorème 2.8.1 – Caractérisation des bijections

Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement s'il existe $g : F \to E$ tel que

$$g \circ f = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{id}_F .$$

Cette application g est unique et vaut f^{-1}.

Démonstration. Le sens direct résulte de la définition. Réciproquement, $g \circ f = \mathrm{id}_E$ entraîne l'injectivité de f : si $f(x) = f(x')$, on applique g. L'identité $f \circ g = \mathrm{id}_F$ entraîne la surjectivité : $y = f(g(y))$ pour tout $y \in F$. Enfin, pour chaque y, $g(y)$ est son unique antécédent, d'où $g = f^{-1}$. ■

Proposition 2.8.7 – Réciproque d'une composée

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}, \qquad (f^{-1})^{-1} = f.$$

Démonstration. Par associativité,

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ f = \mathrm{id}_E .$$

La composée dans l'autre sens vaut id_G. Le théorème précédent conclut. Les identités définissant f^{-1} montrent aussi que sa réciproque est f. ■

Exemple 22 – Calcul d'une réciproque

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$, l'équation $y = 3x - 2$ a l'unique solution $x = (y + 2)/3$. Ainsi f est bijective et $f^{-1}(y) = (y + 2)/3$.

Proposition 2.8.8 – Inverse à gauche et inverse à droite

Soit $f : E \to F$, avec E non vide.

i) f est injective si et seulement s'il existe $g : F \to E$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

ii) L'existence de $h : F \to E$ tel que $f \circ h = \mathrm{id}_F$ entraîne que f est surjective. La réciproque est vraie si F est fini, et plus généralement dans le cadre usuel où l'on admet l'axiome du choix.

Démonstration. Si f est injective, fixons $x_0 \in E$. Pour $y \in f(E)$, définissons $g(y)$ comme l'unique antécédent de y, et pour $y \notin f(E)$, posons $g(y) = x_0$. Alors $g(f(x)) = x$. La réciproque a été démontrée ci-dessus.

Si $f \circ h = \mathrm{id}_F$, tout $y \in F$ a l'antécédent $h(y)$. Réciproquement, si f est surjective, on choisit un antécédent x_y pour chaque $y \in F$ et l'on pose $h(y) = x_y$. Pour une infinité de fibres arbitraires, ce choix simultané fait appel à l'axiome du choix. ■

2.8.6 Une équivalence associée à une application

Proposition 2.8.9 – Partition en fibres et quotient

Pour $f : E \to F$, la relation $x \mathcal{R}_f x' \iff f(x) = f(x')$ est une équivalence sur E. Ses classes sont les fibres non vides de f. L'application

$$\widetilde{f} : E/\mathcal{R}_f \longrightarrow f(E), \qquad [x] \longmapsto f(x)$$

est une bijection.

Démonstration. La réflexivité, la symétrie et la transitivité découlent de celles de l'égalité dans F. La classe de x est $f^{-1}(\{f(x)\})$. La formule définissant $\widetilde{f}$ ne dépend pas du représentant, car $[x] = [x']$ implique $f(x) = f(x')$. Réciproquement, cette égalité implique $[x] = [x']$, d'où l'injectivité. Tout élément de $f(E)$ est une valeur $f(x)$, d'où la surjectivité. ■

2.9 Cardinal et dénombrement

2.9.1 Ensembles finis et comparaison des cardinaux

Définition 2.9.1 – Cardinal fini

Un ensemble E est **fini** s'il est vide ou s'il existe une bijection de $\{1, \dots, n\}$ sur E pour un entier $n \geq 1$. Ce nombre d'éléments est son **cardinal**, noté $|E|$ ou $\mathrm{card}(E)$. On pose $|\emptyset| = 0$.

Proposition 2.9.1 – Applications entre ensembles finis

Pour des ensembles finis non vides E et F :

$$\begin{aligned} |E| \leq |F| &\iff \text{il existe une injection } E \to F, \\ |E| \geq |F| &\iff \text{il existe une surjection } E \to F, \\ |E| = |F| &\iff \text{il existe une bijection } E \to F. \end{aligned}$$

Démonstration. Une injection envoie les éléments de E sur autant d'éléments distincts de F, donc $|E| \leq |F|$. Une surjection possède au moins un antécédent pour chacun des éléments distincts de F, donc $|F| \leq |E|$. Une bijection donne les deux inégalités.

Réciproquement, écrivons $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $F = \{y_1, \dots, y_m\}$. Si $n \leq m$, $e_i \mapsto y_i$ est injective. Si $n \geq m$, on envoie e_i sur y_i pour $i \leq m$ et tous les autres éléments sur y_m : on obtient une surjection. Si $n = m$, $e_i \mapsto y_i$ est bijective. ■

Théorème 2.9.1 – Même cardinal fini

Si E et F sont finis avec $|E| = |F|$, alors pour une application $f : E \to F$:

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}.$$

Démonstration. Si f est injective, alors $|f(E)| = |E| = |F|$ et $f(E) \subseteq F$, donc $f(E) = F$. Si f est surjective mais non injective, deux éléments distincts ont la même image, donc $|f(E)| \leq |E| - 1 < |F|$, contradiction. Le cas des ensembles vides est immédiat. ■

Remarque 14 – La finitude est indispensable

Sur $\mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$ est injective mais non surjective. L'application $n \mapsto \lfloor n/2 \rfloor$ est surjective mais non injective. Le théorème précédent ne s'étend donc pas aux ensembles infinis.

2.9.2 Formules de dénombrement

Proposition 2.9.2 – Réunion, produit et ensemble des parties

Pour des ensembles finis A, B, E, F, avec $|E| = n$ et $|F| = m$:

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B|, \\ |E \times F| &= nm, \qquad |\mathcal{P}(E)| = 2^n. \end{aligned}$$

Plus généralement, $|E_1 \times \cdots \times E_k| = \prod_{i=1}^{k} |E_i|$.

Démonstration. La réunion est la réunion disjointe de $A \setminus B$, $A \cap B$ et $B \setminus A$. Dans $|A| + |B|$, les éléments de l'intersection sont comptés deux fois, d'où la première formule.

Pour chaque $x \in E$, il existe m couples (x, y) avec $y \in F$: le produit contient nm éléments. La formule générale se déduit par récurrence. Enfin, pour former une partie de E, chacun des n éléments est soit retenu, soit exclu, indépendamment des autres. Il y a donc 2^n parties. Si $n = 0$, $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ a bien un élément. ■

Proposition 2.9.3 – Nombre d'applications, d'injections et de bijections

Soient E, F finis non vides avec $|E| = n$ et $|F| = m$.

i) Le nombre d'applications $E \to F$ est m^n.

ii) Le nombre d'injections $E \to F$ est 0 si $n > m$, et

$$m(m-1)\cdots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!} \quad \text{si } n \leq m.$$

iii) Si $n = m$, le nombre de bijections $E \to F$ est $n!$.

Exemple 23 – Compter des applications

Si $|E| = 3$ et $|F| = 5$, il existe $5^3 = 125$ applications et $5 \times 4 \times 3 = 60$ injections de E dans F. Un ensemble à quatre éléments possède $2^4 = 16$ parties et $4! = 24$ permutations (bijections de l'ensemble sur lui-même).

2.9.3 Ensembles équipotents et dénombrables

Définition 2.9.2 – Comparaison au moyen de bijections

Deux ensembles sont **équipotents**, ou de même cardinal, s'il existe une bijection entre eux. Un ensemble est **dénombrable** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. On dit **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable.

Exemple 24 – Des ensembles infinis de même cardinal

L'application $\mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$, est bijective. Ainsi un ensemble infini peut être équipotent à une partie propre.
L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable, par la bijection $u : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$u(2k) = k, \qquad u(2k+1) = -(k+1) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Elle énumère $0, -1, 1, -2, 2, -3, \ldots$ sans répétition et atteint tout entier relatif.

Proposition 2.9.4 – Partie infinie de $\mathbb{N}$

Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration. Soit $A \subseteq \mathbb{N}$ infinie. Définissons $a_0 = \min A$, puis

$$a_{n+1} = \min\big(A \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}\big).$$

L'ensemble restant est toujours non vide, donc cette construction est possible. La suite est strictement croissante, et $n \mapsto a_n$ est injective. Pour $a \in A$, il existe un nombre fini r

d'éléments de A strictement inférieurs à a. La construction sélectionne ces r éléments en premier, puis sélectionne a ; ainsi $a = a_r$. L'application est surjective, donc bijective. ■

Théorème 2.9.2 – Théorème de Cantor

Pour tout ensemble E, il n'existe aucune surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$. En particulier, E et $\mathcal{P}(E)$ ne sont pas équipotents.

Références bibliographiques

[1] Daniel J. Velleman, *How to Prove It : A Structured Approach*, 3e édition, Cambridge University Press, 2019.

[2] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, 8e édition, McGraw-Hill, 2019.