Série n° 2

Analyse I — Travaux Dirigés

Généralités sur les suites

Énoncés et corrigés détaillés

Exercice 1 : Calcul de limites

Déterminer la limite, si elle existe, des suites suivantes, définies pour $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{n + (-1)^n}{\sqrt{3}n + 2(-1)^n}, \quad b_n = \frac{1 + 2^n}{1 - 3^n}, \quad c_n = \cos(\pi n),$$
$$d_n = \frac{\cos\left(\sqrt[n]{\pi^2 e^{\ln(n^n)}}\right)}{\sqrt{n^2+2}}, \quad e_n = \frac{e^n + \pi^n}{e^n - \pi^n}, \quad f_n = \left(\sin\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$
$$g_n = \sqrt[n+1]{2 + (-1)^n}.$$

Corrigé de l'exercice 1

1. Suite $a_n = \dfrac{n + (-1)^n}{\sqrt{3}n + 2(-1)^n}$

   On factorise par n au numérateur et au dénominateur :

$$a_n = \frac{n\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)}{n\left(\sqrt{3} + \frac{2(-1)^n}{n}\right)} = \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{\sqrt{3} + \frac{2(-1)^n}{n}}$$

   Comme $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$. Par quotient de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2. Suite $b_n = \dfrac{1 + 2^n}{1 - 3^n}$

   On factorise par le terme prédominant au numérateur (2^n) et au dénominateur (3^n) :

$$b_n = \frac{2^n\left(\frac{1}{2^n} + 1\right)}{3^n\left(\frac{1}{3^n} - 1\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{\frac{1}{2^n} + 1}{\frac{1}{3^n} - 1}$$

   On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{2^n} + 1}{\frac{1}{3^n} - 1} = -1$. Par produit :

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$$

3. Suite $c_n = \cos(\pi n)$
   On remarque que $c_n = (-1)^n$. La suite prend les valeurs 1 si n est pair et -1 si n est impair. Elle possède deux valeurs d'adhérence distinctes, donc **la suite c_n n'admet pas de limite**.

4. Suite $d_n = \dfrac{\cos\left(\sqrt[n]{\pi^2 e^{\ln(n^n)}}\right)}{\sqrt{n^2+2}}$
   On utilise l'encadrement classique du cosinus : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -1 \leq \cos\left(\sqrt[n]{\pi^2 e^{\ln(n^n)}}\right) \leq 1$. En divisant par $\sqrt{n^2+2} > 0$, on obtient :
   $$\frac{-1}{\sqrt{n^2+2}} \leq d_n \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$$
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{n^2+2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} = 0$, d'après le théorème des gendarmes :
   $$\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$$

5. Suite $e_n = \dfrac{e^n + \pi^n}{e^n - \pi^n}$
   On factorise par π^n car $\pi > e$:
   $$e_n = \frac{\pi^n\left(\left(\frac{e}{\pi}\right)^n + 1\right)}{\pi^n\left(\left(\frac{e}{\pi}\right)^n - 1\right)} = \frac{\left(\frac{e}{\pi}\right)^n + 1}{\left(\frac{e}{\pi}\right)^n - 1}$$
   Comme $0 < \frac{e}{\pi} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{e}{\pi}\right)^n = 0$. Ainsi :
   $$\lim_{n\to+\infty} e_n = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

6. Suite $f_n = \left(\sin\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$
   Pour n suffisamment grand, $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{\pi}{2}$. On sait que sur cet intervalle $0 < \sin(x) < x$. On a donc :
   $$0 < \left(\sin\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 0$, par encadrement :
   $$\lim_{n\to+\infty} f_n = 0$$

7. Suite $g_n = \sqrt[n+1]{2+(-1)^n}$
   On écrit $g_n = \exp\left(\frac{\ln(2+(-1)^n)}{n+1}\right)$. Or, $1 \leq 2+(-1)^n \leq 3$, donc $0 \leq \ln(2+(-1)^n) \leq \ln(3)$. Il vient :
   $$0 \leq \frac{\ln(2+(-1)^n)}{n+1} \leq \frac{\ln(3)}{n+1}$$
   Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(2+(-1)^n)}{n+1} = 0$. Par continuité de l'exponentielle :
   $$\lim_{n\to+\infty} g_n = e^0 = 1$$

Exercice 2 : Nature et limites de suites

Étudier la nature des suites (u_n) suivantes et donner leur limite éventuelle.

1. $u_n = 3^n e^{-3n}$
2. $u_n = \ln(2n^2 - n) - \ln(3n + 1)$
3. $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$
4. $u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2}$
5. $u_n = \left(2 \sin \frac{1}{n} + \frac{3}{4} \cos n\right)^n$

Corrigé de l'exercice 2

1. $u_n = 3^n e^{-3n}$
   On peut réécrire le terme général sous la forme d'une suite géométrique :
   $$u_n = 3^n (e^{-3})^n = \left(\frac{3}{e^3}\right)^n$$
   On sait que $e \approx 2,718$, donc $e^3 \approx 20,08$. Ainsi, $0 < \frac{3}{e^3} < 1$. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q \in]-1, 1[$. Elle est donc **convergente**.
   $$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

2. $u_n = \ln(2n^2 - n) - \ln(3n + 1)$
   En utilisant les propriétés du logarithme ($\ln A - \ln B = \ln \frac{A}{B}$), on a :
   $$u_n = \ln\left(\frac{2n^2 - n}{3n + 1}\right) = \ln\left(\frac{n^2(2 - \frac{1}{n})}{n(3 + \frac{1}{n})}\right) = \ln\left(n \cdot \frac{2 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n}}\right)$$
   Or, $\lim_{n \to +\infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{2}{3}$. Par conséquent, l'argument du logarithme tend vers $+\infty$ par produit. La suite (u_n) est donc **divergente**.
   $$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

3. $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$
   C'est une forme indéterminée $+\infty - \infty$. On utilise la quantité conjuguée :
   $$u_n = \frac{(n^2 + n + 1) - (n^2 - n + 1)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})} + \sqrt{n^2(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})}}$$
   En simplifiant par n (car $n > 0$) :
   $$u_n = \frac{2n}{n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}$$
   Par somme de limites, le dénominateur tend vers $1 + 1 = 2$. La suite est **convergente**.
   $$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{2} = 1$$

4. $u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2}$
   On sait que $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Donc $n! \leq n^n$. Par croissance du logarithme :

$$0 \leq \ln(n!) \leq \ln(n^n) = n \ln n$$

   En divisant par n^2 :

$$0 \leq u_n \leq \frac{n \ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n}$$

   Par croissances comparées, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, la suite est **convergente**.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

5. $u_n = \left(2 \sin \frac{1}{n} + \frac{3}{4} \cos n\right)^n$

   Pour tout $n \geq N_0$ plus grande, l'inégalité $|\sin \frac{1}{n}| \leq |\frac{1}{n}|$ donne

$$\left|2 \sin \frac{1}{n} + \frac{3}{4} \cos n\right| \leq \frac{2}{n} + \frac{3}{4} \leq \frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{7}{8}.$$

   Ainsi $0 \leq |u_n| \leq (7/8)^n \to 0$. Par encadrement, $u_n \to 0$.

Exercice 3 : Partie entière et densité

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Donner l'encadrement qui définit la partie entière $\lfloor x \rfloor$.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$. Donner un encadrement de $n^2 u_n$.
   (en utilisant $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.)
3. En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.
4. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 3

1. Encadrement fondamental. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la partie entière $\lfloor x \rfloor$ est définie par l'encadrement :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

2. Encadrement de la suite u_n. Soit $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$. En sommant l'encadrement précédent pour chaque terme, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} (kx - 1) < n^2 u_n \leq \sum_{k=1}^{n} kx$$

   En utilisant la formule $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, on déduit :

$$x \frac{n(n+1)}{2} - n < n^2 u_n \leq x \frac{n(n+1)}{2}$$

3. Limite et Convergence. En divisant par n^2, on obtient l'encadrement de u_n :

$$\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}<u_n\leq\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Les deux membres encadrant u_n convergent vers $\frac{x}{2}$ quand $n\to+\infty$.
D'après le **théorème des gendarmes** :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{x}{2}$$

4. Conclusion sur la densité. Pour tout $y\in\mathbb{R}$, appliquons le résultat précédent à $x=2y$. Chaque u_n est rationnel et $u_n\to y$. Ainsi, on en déduit que $\mathbb{Q}$ **est dense dans** $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Suite rationnelle et définition de la limite

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie par $u_n=\frac{3n-1}{2n+3}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. Démontrer que cette suite est croissante et majorée.
2. Démontrer, en utilisant la définition de la limite d'une suite, que $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{3}{2}$.

Corrigé de l'exercice 4

1. Calculons la différence $u_{n+1}-u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\frac{3(n+1)-1}{2(n+1)+3}-\frac{3n-1}{2n+3},\\&=\frac{3n+2}{2n+5}-\frac{3n-1}{2n+3}\end{aligned}$$

Mise au même dénominateur :

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\frac{(3n+2)(2n+3)-(3n-1)(2n+5)}{(2n+5)(2n+3)},\\&=\frac{(6n^2+9n+4n+6)-(6n^2+15n-2n-5)}{(2n+5)(2n+3)},\\&=\frac{13n+6-(13n-5)}{(2n+5)(2n+3)},\\&=\frac{11}{(2n+5)(2n+3)}.\end{aligned}$$

Comme $n\geq 0$, le dénominateur est positif. On a $u_{n+1}-u_n>0$, donc la suite (u_n) est **strictement croissante**.

On peut réécrire u_n en faisant apparaître le dénominateur au numérateur :

$$\begin{aligned}u_n&=\frac{\frac{3}{2}(2n+3)-\frac{9}{2}-1}{2n+3},\\&=\frac{\frac{3}{2}(2n+3)-\frac{11}{2}}{2n+3},\\&=\frac{3}{2}-\frac{11}{2(2n+3)}.\end{aligned}$$

Comme $\frac{11}{2(2n+3)}>0$, on a $u_n<\frac{3}{2}$ pour tout n. La suite donc est **majorée par** $\frac{3}{2}$.

2. Démontrer la limite par la définition

   Rappel de la définition :

$$\lim u_n = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - L| < \varepsilon.$$

   Soit $\varepsilon > 0$. On cherche N tel que pour tout $n \geq N$:

$$\left|\frac{3n-1}{2n+3} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$$

   Alors

$$\left|\frac{2(3n-1)-3(2n+3)}{2(2n+3)}\right| = \left|\frac{6n-2-6n-9}{4n+6}\right| = \left|\frac{-11}{4n+6}\right| = \frac{11}{4n+6}$$

   On veut donc :

$$\begin{aligned}\frac{11}{4n+6} < \varepsilon &\iff \frac{4n+6}{11} > \frac{1}{\varepsilon},\\ &\iff 4n+6 > \frac{11}{\varepsilon},\\ &\iff n > \frac{1}{4}\left(\frac{11}{\varepsilon} - 6\right).\end{aligned}$$

   Il suffit de choisir $N = \max\left(0, \left\lfloor \frac{1}{4}\left(\frac{11}{\varepsilon} - 6\right)\right\rfloor + 1\right)$.

   Ainsi, pour tout $n \geq N$, l'inégalité $|u_n - \frac{3}{2}| < \varepsilon$ est vérifiée. Ceci prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{2}$.

Exercice 5 : Suite définie par récurrence

Soit (u_n) une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ et la donnée de u_0.

1. (a) Montrer que si $u_0 \leq 2$, alors pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq 2$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

2. (a) Montrer que si $u_0 \geq 2$, alors pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 2$ et que la suite est monotone.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

3. (a) On pose $v_n = u_n - 2$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   (b) En déduire une expression de u_n en fonction de n et u_0. Retrouver le résultat des deux premières questions.

Corrigé de l'exercice 5

1. (a) Supposons $u_0 \leq 2$. La propriété $u_n \leq 2$ est vraie au rang 0. Si elle est vraie au rang n, alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \leq \frac{1}{2} \times 2 + 1 = 2.$$

   Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par récurrence. De plus,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(2 - u_n) \geq 0.$$

   La suite est croissante.

   (b) Elle est croissante et majorée par 2, donc elle converge vers un réel L. En passant à la limite dans la récurrence, $L = \frac{1}{2}L + 1$, d'où $L = 2$.

2. (a) Supposons $u_0 \geq 2$. La propriété est vraie au rang 0 et $u_n \geq 2$ entraîne $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \geq 2$. Par récurrence, $u_n \geq 2$ pour tout n. Ainsi, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(2 - u_n) \leq 0$: la suite est décroissante.

   (b) Elle est décroissante et minorée par 2, donc elle converge. Sa limite vérifie à nouveau $L = \frac{1}{2}L + 1$, donc $L = 2$.

3. (a) En posant $v_n = u_n - 2$, on obtient

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n.$$

   La suite (v_n) est géométrique de raison $1/2$.

   (b) Comme $v_0 = u_0 - 2$, on a $v_n = (u_0 - 2)2^{-n}$, donc

$$\boxed{u_n = 2 + (u_0 - 2)2^{-n}.}$$

   Pour toute valeur réelle de u_0, on retrouve $u_n \to 2$.

   Si $u_0 = 2$, la suite est constante. Si $u_0 < 2$, elle est strictement croissante ; si $u_0 > 2$, elle est strictement décroissante.

Exercice 6 : Densité et approximation par des suites

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.

1. Vérifier qu'il existe un entier naturel n tel que $1 < n(y - x)$.
2. Soit $m = \lfloor nx \rfloor + 1$. Montrer que
$$x < \frac{m}{n} < y.$$
3. En utilisant 2), montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x < \alpha < y$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) telle que (x_n) converge vers x.

Corrigé de l'exercice 6

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. On a alors $y - x > 0$. D'après la **propriété archimédienne** de $\mathbb{R}$:
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad n\varepsilon > 1$$
   En posant $\varepsilon = y - x$, il existe un entier naturel non nul n tel que $n(y - x) > 1$, ce qui équivaut à :
$$ny - nx > 1 \tag{1}$$

2. Densité des rationnels ($\mathbb{Q}$). Posons l'entier $m = \lfloor nx \rfloor + 1$. Par définition de la partie entière, nous avons l'encadrement :
$$\lfloor nx \rfloor \leq nx < \lfloor nx \rfloor + 1$$
   D'où :
$$m - 1 \leq nx < m$$
   Démontrons que le rationnel $q = \frac{m}{n}$ répond à la condition $x < q < y$:

   (a) **D'une part :** $nx < m \implies x < \frac{m}{n}$.

(b) **D'autre part :** $m \leq nx + 1$. D'après l'inéquation (1), on a $1 < ny - nx$, donc :

$$m \leq nx + 1 < nx + (ny - nx) = ny$$

On en déduit $m < ny$, soit $\frac{m}{n} < y$.

Alors $x < \frac{m}{n} < y$. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3. Densité des irrationnels ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Soient $x < y$. Appliquons le résultat précédent aux réels $(x - \sqrt{2})$ et $(y - \sqrt{2})$:

$$\exists q \in \mathbb{Q}, \quad x - \sqrt{2} < q < y - \sqrt{2}$$

En ajoutant $\sqrt{2}$ à chaque membre :

$$x < q + \sqrt{2} < y$$

Soit $\alpha = q + \sqrt{2}$. Comme $q \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, alors $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Alors $\exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x < \alpha < y$.

4. Caractérisation séquentielle. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) **Cas des rationnels :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in \mathbb{Q}$ tel que $x - \frac{1}{n} < x_n < x$. Par le théorème des gendarmes, comme $\lim_{n\to\infty}(x - \frac{1}{n}) = x$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x$$

(b) **Cas des irrationnels :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x - \frac{1}{n} < y_n < x$. De la même manière :

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = x$$

Exercice 7 : Comparaison de suites convergentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. On note ℓ et ℓ' les limites respectives de (u_n) et (v_n). On suppose que $\ell < \ell'$.

1. Montrer qu'il existe N tel que $\forall n \geq N$, $u_n < v_n$.
2. Réciproque ?

Corrigé de l'exercice 7

1. L'idée est de choisir un voisinage suffisamment petit autour de chaque limite pour que ces voisinages ne se chevauchent pas.

Posons $\varepsilon = \frac{\ell' - \ell}{3}$. Comme $\ell < \ell'$, on a $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite :

Pour (u_n) : $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Ceci implique en particulier :

$$u_n < \ell + \varepsilon.$$

Pour (v_n) : $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, |v_n - \ell'| < \varepsilon.$$

Ceci implique en particulier :

$$v_n > \ell' - \varepsilon.$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$, on a :

$$u_n < \ell + \varepsilon \quad \text{et} \quad v_n > \ell' - \varepsilon$$

Comparons $\ell + \varepsilon$ et $\ell' - \varepsilon$. Par construction de ε :

$$(\ell' - \varepsilon) - (\ell + \varepsilon) = \ell' - \ell - 2\varepsilon = \ell' - \ell - \frac{2}{3}(\ell' - \ell) = \frac{1}{3}(\ell' - \ell) > 0$$

On en déduit que $\ell + \varepsilon < \ell' - \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geq N$:

$$u_n < \ell + \varepsilon < \ell' - \varepsilon < v_n$$

D'où $u_n < v_n$.

2. La réciproque est fausse. Si l'on suppose que pour tout n, $u_n < v_n$, on peut seulement conclure que $\ell \leq \ell'$ (inégalité large). L'inégalité stricte peut ne pas être conservée à la limite.

   Contre-exemple : Soient les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = 0 \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n}$$

   On a bien $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ car $0 < \frac{1}{n}$. Cependant :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} v_n = 0$$

   Ici $\ell = \ell' = 0$, donc la condition $\ell < \ell'$ n'est pas vérifiée.

Exercice 8 : Suites extraites et suites adjacentes

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. On suppose que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ. Montrer que (u_n) converge vers ℓ.

2. Donner un exemple de suite telle que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent mais (u_n) diverge.

3. On suppose que les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que la suite (u_n) converge.

4. Montrer que la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \cos\left((n + \frac{1}{n})\pi\right)$ est divergente.

5. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

   Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que (u_n) converge.

6. Soient $a, b > 0$ et (u_n), (v_n) les suites définies par :

$$u_0 = a, \quad v_0 = b, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

   Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes vers une même limite appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b.

Corrigé de l'exercice 8

1. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_{2n} \to \ell$, $\exists N_1$ tel que

$$\forall n \geq N_1, |u_{2n} - \ell| < \varepsilon.$$

et $u_{2n+1} \to \ell$, $\exists N_2$ tel que

$$\forall n \geq N_2, |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon.$$

Posons $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$.

$$\forall k \geq N, |u_k - \ell| < \varepsilon.$$

La suite (u_n) converge vers ℓ.

2. Considérons la suite $u_n = (-1)^n$.

$u_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1$.

$u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \to -1$.

Les deux suites extraites convergent, mais vers des limites différentes. Elle est donc **divergente**.

3. Supposons que $u_{2n} \to \ell_1$, $u_{2n+1} \to \ell_2$ et $u_{3n} \to \ell_3$.
   * La suite (u_{6n}) est une suite extraite de (u_{2n}) (car $6n = 2(3n)$) et de (u_{3n}) (car $6n = 3(2n)$). Par unicité de la limite, $\ell_1 = \ell_3$.
   * La suite (u_{6n+3}) est une suite extraite de (u_{2n+1}) (car $6n + 3 = 2(3n + 1) + 1$) et de (u_{3n}). Donc $\ell_2 = \ell_3$.

   On en déduit $\ell_1 = \ell_2$. D'après la question 1, la suite (u_n) converge.

4. On a

$u_{2n} = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$. Or $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} = 0$, donc $\lim u_{2n} = \cos(0) = 1$.

$u_{2n+1} = \cos\left((2n+1)\pi + \frac{\pi}{2n+1}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)$. Or $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n+1} = 0$, donc $\lim u_{2n+1} = -1$.

Les limites sont différentes, donc la suite (u_n) **diverge**.

5. Soit $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

   (a) $u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} = \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} < 0$ (décroissante).

   $u_{2n+3} - u_{2n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+4} = \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} > 0$ (croissante).

   (b) $u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} = \frac{-1}{2n+2} \to 0$.

   Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ. Ainsi (u_n) converge vers ℓ.

6. On a $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$.

   On a

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} \leq v_{n+1}.$$

   Si $u_n \leq v_n$, alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{u_n^2} = u_n$ (croissante) et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \leq \frac{v_n+v_n}{2} = v_n$ (décroissante).

   On a $0 < u_1 \leq v_1$, quels que soient $a, b > 0$. Pour tout $n \geq 1$, $u_1 \leq u_n \leq v_n \leq v_1$. Les deux suites sont donc monotones à partir du rang 1 et bornées ; elles convergent vers ℓ_u et ℓ_v.

   En passant à la limite dans $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$, on obtient $\ell_v = \frac{\ell_u+\ell_v}{2} \implies \ell_u = \ell_v$.

Exercice 9 : Suites trigonométriques

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq n\pi$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \cos(n\theta), \quad v_n = \sin(n\theta).$$

1. Montrer que (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge (penser à une relation entre les limites éventuelles).
2. En déduire que (u_n) et (v_n) divergent. (On pourra supposer le contraire, utiliser les relations démontrées dans 1) et remarquer que si $\ell = \lim u_n$, $\ell' = \lim v_n$ alors $\ell^2 + \ell'^2 = 1$).

Corrigé de l'exercice 9

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On pose $u_n = \cos(n\theta)$ et $v_n = \sin(n\theta)$.

1. D'après les formules d'addition :

$$u_{n+1} = u_n \cos\theta - v_n \sin\theta$$
$$v_{n+1} = v_n \cos\theta + u_n \sin\theta$$

Puisque $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, $\sin\theta \neq 0$. On peut exprimer chaque terme en fonction de l'autre :

$$v_n = \frac{u_n \cos\theta - u_{n+1}}{\sin\theta} \quad \text{et} \quad u_n = \frac{v_{n+1} - v_n \cos\theta}{\sin\theta}$$

Par les théorèmes d'opérations sur les limites, si l'une des suites converge, l'autre converge également.

2. Supposons par l'absurde que $(u_n) \to \ell$ et $(v_n) \to \ell'$.

Par la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on a $\ell^2 + \ell'^2 = 1$.

En passant à la limite dans les relations de récurrence :

$$\ell = \ell\cos\theta - \ell'\sin\theta \implies \ell(1-\cos\theta) = -\ell'\sin\theta$$

$$\ell' = \ell'\cos\theta + \ell\sin\theta \implies \ell'(1-\cos\theta) = \ell\sin\theta$$

En élevant au carré et en additionnant :

$$(\ell^2 + \ell'^2)(1-\cos\theta)^2 = (\ell^2+\ell'^2)\sin^2\theta$$

Comme $\ell^2+\ell'^2 = 1$, on obtient $(1-\cos\theta)^2 = \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$. D'où $1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, soit $2\cos^2\theta - 2\cos\theta = 0$.

Cela implique $\cos\theta(\cos\theta - 1) = 0$. Donc $\cos\theta = 0$ ou $\cos\theta = 1$.

* Si $\cos\theta = 1$, alors $\theta \in 2k\pi$, ce qui est exclu par l'énoncé.
* Si $\cos\theta = 0$, alors $\sin^2\theta = 1$. Les relations limites deviennent $\ell = -\ell'\sin\theta$ et $\ell' = \ell\sin\theta$, ce qui impose $\ell = \ell' = 0$, contredisant $\ell^2 + \ell'^2 = 1$.

Les suites divergent.

Exercice 10 : Suite harmonique

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

Corrigé de l'exercice 10

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. **Démontrer que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$:**
   On a $H_{2n} - H_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Cette somme comporte n termes. Comme pour tout $k \in \{n+1, \ldots, 2n\}$, $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$, on a :
   $$H_{2n} - H_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$
2. **Limite de (H_n) :**
   La suite (H_n) est croissante car $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0$. Si elle convergeait vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors
   $$\lim(H_{2n} - H_n) = \ell - \ell = 0.$$
   Ceci contredirait l'inégalité $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$. Ainsi, la suite est croissante et non majorée, donc
   $$\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty.$$