Série n° 3

Analyse I — Travaux Dirigés

Limites et fonctions continues

Énoncés et corrigés détaillés

Exercice 1 : Définition ε-δ

En utilisant la définition formelle de la limite $(\epsilon - \delta)$, démontrer les assertions suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-1) = 5$.
2. $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$.
3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3}$.

Corrigé de l'exercice 1

1. Soit $\epsilon > 0$. Posons $\delta = \frac{\epsilon}{3}$. $|x-2| < \delta \implies |(3x-1)-5| = 3|x-2| < 3\delta = \epsilon$.
2. Soit $\epsilon > 0$. Posons $\delta = \min(1, \frac{\epsilon}{3})$. $|x-1| < \delta \implies |x+1| < 3$, d'où $|x^2-1| = |x-1||x+1| < 3\delta \leq \epsilon$.
3. Soit $\epsilon > 0$. Posons $\delta = \min(1, 6\epsilon)$. $|x-3| < \delta \implies x > 2 \implies \frac{1}{3|x|} < \frac{1}{6}$. D'où $|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}| = \frac{|x-3|}{3|x|} < \frac{\delta}{6} \leq \epsilon$.

Exercice 2 : Prolongement par continuité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$$

1. Calculer la limite de f en 1.
2. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Si oui, définir ce prolongement.

Corrigé de l'exercice 2

1. Pour $x \neq 1$, multiplions par la forme conjuguée :

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

En simplifiant par $(x-1)$:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}$$

Par passage à la limite :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1+1}{\sqrt{1+3}+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2. La limite en 1 étant finie, f est prolongeable par continuité. Soit $\tilde{f}$ son prolongement défini par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Exercice 3 : Théorème des valeurs intermédiaires

1. Montrer que l'équation $x^3 + x^2 - 1 = 0$ admet au moins une solution réelle dans l'intervalle $[0, 1]$.
2. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.
3. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer qu'il existe $c \in [a, \frac{a+b}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{b-a}{2})$.

Corrigé de l'exercice 3

1. Soit $h(x) = x^3 + x^2 - 1$. h est continue sur $[0, 1]$. $h(0) = -1 < 0$ et $h(1) = 1 > 0$. D'après le TVI, $\exists c \in [0, 1]$ tel que $h(c) = 0$.
2. Soit $\phi(x) = f(x) - x$. ϕ est continue sur $[0, 1]$. $\phi(0) = f(0) \geq 0$ et $\phi(1) = f(1) - 1 \leq 0$. D'après le TVI, $\exists c \in [0, 1]$ tel que $\phi(c) = 0$, soit $f(c) = c$.
3. Soit $g(x) = f(x + \frac{b-a}{2}) - f(x)$ sur $[a, \frac{a+b}{2}]$. $g(a) = f(a + \frac{b-a}{2}) - f(a)$ et $g(\frac{a+b}{2}) = f(b) - f(a + \frac{b-a}{2})$. Comme $f(a) = f(b)$, on a $g(\frac{a+b}{2}) = -g(a)$. Le produit $g(a) \cdot g(\frac{a+b}{2}) \leq 0$, donc par le TVI, il existe $c \in [a, \frac{a+b}{2}]$ tel que $g(c) = 0$.

Exercice 4 : Continuité et densité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = 0$. Montrer que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y)$.
   (a) Calculer $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis pour $n \in \mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = r \cdot f(1)$.
   (c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \cdot x$ avec $a = f(1)$.

Corrigé de l'exercice 4

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc il existe une suite $(r_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $r_n \to x$. Par continuité de f : $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n)$. Comme $f(r_n) = 0$ pour tout n, $f(x) = 0$.
2. (a) $f(0) = 0$. Par récurrence, $f(n) = nf(1)$ pour $n \in \mathbb{N}$. $f(n - n) = f(0) = 0 \implies f(-n) = -f(n)$, donc $f(n) = nf(1)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
   (b) Soit $r = \frac{p}{q}$. $f(p) = f(q \cdot \frac{p}{q}) = qf(\frac{p}{q})$. Comme $f(p) = pf(1)$, on a $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}f(1)$.

(c) Soit $a = f(1)$. Les fonctions f et $x \mapsto ax$ coïncident sur $\mathbb{Q}$. Par continuité et densité de $\mathbb{Q}$, elles coïncident sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : Comportement à l'infini

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que f admet une limite finie L en $+\infty$.

1. Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$.
2. La fonction atteint-elle nécessairement ses bornes ? (Donner un exemple ou un contre-exemple).

Corrigé de l'exercice 5

1. Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, pour $\epsilon = 1$, il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geq A$, $f(x) \in [L-1, L+1]$. Sur $[0, A]$, f est continue sur un segment, donc elle est bornée par un certain M_0. En prenant $M = \max(M_0, |L-1|, |L+1|)$, on a $\forall x \in [0, +\infty[, |f(x)| \leq M$.
2. Non, les bornes ne sont pas nécessairement atteintes. *Contre-exemple :* $f(x) = \frac{x}{x+1}$ sur $[0, +\infty[$. f est continue, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$. On a $\forall x \geq 0, 0 \leq f(x) < 1$. La borne supérieure est 1, mais l'équation $f(x) = 1$ n'a pas de solution dans $[0, +\infty[$.